Моделирование взаимодействия нелинейных волн в модели синус-Гордона для материалов с дефектами

А.М. Гумеров, Е.Г. Екомасов

Башкирский государственный университет, г. Уфа

С помощью численных методов исследована динамика нелинейных волн (солитонов) модифицированного уравнения синус-Гордона в модели с пространственной модуляцией периодического потенциала. Рассмотрен случай резонансного взаимодействия кинка и бризера, приводящий к отражению кинка от области притягивающего потенциала.

Ключевые слова: солитон, кинк, бризер, уравнение синус-Гордона, резонансное отражение, нелинейные волны.

Using numerical methods, the dynamics of nonlinear waves (solitons) of the modified sine-Gordon equation in a model with spatially modulated periodic potential is studied. The case of resonant interaction of a kink and a breather, which leads to reflection of the kink from the attractive potential field is considered.

Keywords: soliton, kink, breather, sine-Gordon equation, resonant interaction, nonlinear waves.

Введение

Известно, что в твердых телах под действием сильного возмущения часто протекают процессы, обладающие существенной нелинейностью. Их изучение требует специальных подходов, одним из которых является использование для описания уединенных волн – топологических и динамических солитонов нелинейных точно интегрируемых (и близких к ним) эволюционных уравнений. Одним из таких уравнений является уравнение синус-Гордона (УСГ), впервые введенное в физику твердого тела, по-видимому, Френкелем и Конторовой для описания одномерной дислокации в кристалле (типа «краудион») [1]. На сегодняшний день данное уравнение пользуется необычайной популярностью в связи с тем, что его решения прекрасно моделируют различные локализованные динамические возбуждения физических систем [2,3], например: динамику доменных границ в магнетиках, распределение директора в нематических жидких кристаллах, поведение волн зарядовой плотности, распространение волн в суперионных проводниках.

В реальных кристаллах всегда существуют структурные и химические неоднородности (дефекты), которые нарушают их идеальную трансляционную симметрию. К структурным неоднородностям можно отнести наличие дислокаций, дисклинаций, различного типа зерен и т.п.. Наличие таких дефектов приводит к появлению локальных изменений параметров материала, в частности для УСГ к пространственной модуляции периодического потенциала (ПМПП) [3]. Хорошо известны в теории колебаний решетки локализованные моды, связанные с наличием точечных дефектов (или примесей). Такая примесная мода может возбуждаться при рассеянии кинка, что может существенно изменить результат прохождения кинка [3-6]. Например, интересный эффект, открытый при численном моделировании [3], заключается в том, что кинк УСГ может быть полностью отражен притягивающей точечной примесью из-за резонансного обмена энергией между трансляционной модой кинка и примесной модой. В данной работе изучается возможность существования и особенности проявления подобного эффекта в случае одномерного протяженного дефекта.

Метод решения, результаты численных расчетов

Рассмотрим рассеяние кинка модифицированного УСГ на одномерной ПМПП, моделирующей дефекты материала [5,6]:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{K(x)}{2}\sin 2\theta = 0 \qquad (1)$$

где $\theta(x,t)$ – функция от координаты x и времени t, $K(x)$ – некоторая функция, описывающая ПМПП. В слабо неоднородном случае $K(x)$ поведение солитонов уравнения вида (1) можно описать в модели точечной частицы, используя теорию возмущений. Тогда их временная эволюция будет подчиняться простым дифференциальным уравнениям [1]. Часто учет влияния возмущений может приводить к существенному изменению структуры солитонов, которые уже нужно описывать как деформируемые частицы [3,7,8,9]. Наиболее интересен случай, когда размер кинка и размер, характеризующий неоднородность $K(x)$ одного и того же порядка, тогда форма кинка должна претерпевать значительные изменения при прохождении через неоднородную область [1]. Исследование влияния больших возмущений на решение модифицированного УСГ вида (1) в общем случае можно проводить только с помощью численных методов. Для простоты функцию, описывающую $K(x)$ берем в виде [4]:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, x > W \\ 1 - \Delta K, & 0 \le x \le W \end{cases} \qquad (2)$$

Очевидно, что значения $\Delta K > 0$, описывают случай потенциальной ямы, тогда как $\Delta K < 0$ – случай барьера.

Уравнение (1) решалось численно с использованием явной схемы интегрирования, аналогично [5]. В начальный момент времени задавалось распределение $\theta(x,t)$ в виде известного точного решения УСГ – кинка, движущегося с постоянной скоростью υ_0: $\theta(x,t) = 2\mathrm{arctg}(\exp[\Delta(\upsilon_0)(x - \upsilon_0 t)])$, где $\Delta(\upsilon_0) = 1/\sqrt{1-\upsilon_0^2}$. Граничные условия имеют вид: $\theta(-\infty,t) = 0$, $\theta(+\infty,t) = \pi$, $\theta'(\pm\infty,t) = 0$. Затем, кинк пересекает область ПМПП и наблюдается его эволюция.

Раннее было показано [4], что при движении кинка через локальную область ПМПП, для значений $\Delta K > 0$, возможно два варианта эволюции системы (см.рис.1): либо кинк пройдет через область дефекта (если начальная скорость движения кинка υ_0 выше порогового значения скорости для данного дефекта $\upsilon_{\min}$), либо произойдет захват кинка в этой области (если $\upsilon_0 < \upsilon_{\min}$). В данной работе, для обнаружения третьего возможного случая – отражения кинка от притягивающего потенциала, разработана программа [10] реализующая более высокую точность численных расчетов по сравнению с [4,5].

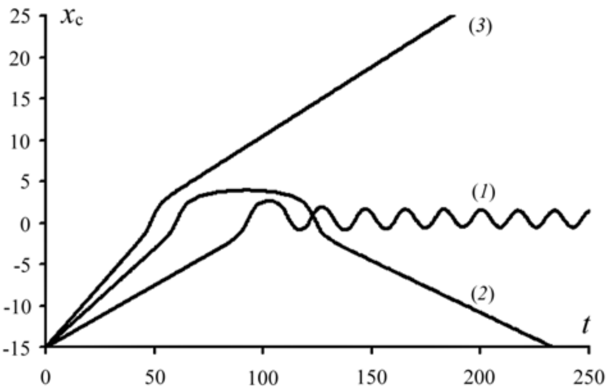

Рис.1. Зависимость координаты центра кинка x_c от времени t при $W = 1$, $\Delta K = 0.8$ для различных начальных скоростей движения кинка x_0: (*1*) – $x_0 = 0.15$ (захват кинка в области дефекта), (*2*) – $x_0 = 0.23875$ (отражение кинка от области дефекта), (*3*) – $x_0 = 0.3$ (прохождение кинка через область дефекта). Центр дефекта расположен в точке с координатой $x = 0.5$.

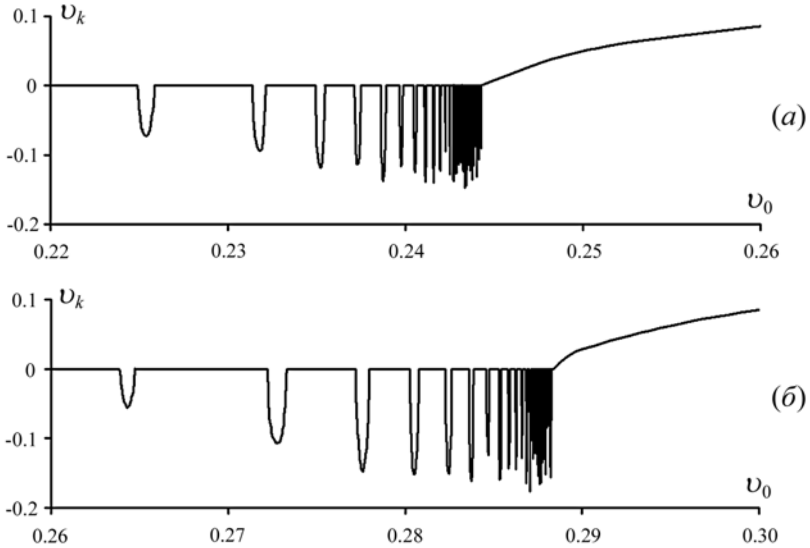

Рис.2. Зависимость конечной скорости движения кинка x_k от начальной скорости движения x_0. Случаи $x_k = 0$ соответствуют пиннингу кинка, $x_k > 0$ – прохождению кинка через область дефекта, $x_k < 0$ – отражению кинка от области дефекта. Параметры дефекта: (*а*) – $W = 1$, $\Delta K = 0.8$; (*б*) – $W = 1$, $\Delta K = 0.9$.

На рис.1 показаны для разных начальных скоростей все три возможных случая эволюции кинка, полученные в результате численных расчетов. Причем найдено, что, как и для случая точечного дефекта, случай отражения имеет резонансный характер, так как наблюдается лишь в определенных узких интервалах начальных скоростей кинка υ_0 (или «рефракционных окнах») (рис.2), положение которых зависит от значений параметров ΔK и W. Из рис.2 видно, что ширина этих «окон» убывает по мере стремления $\upsilon_0 \to \upsilon_{\min}$. При этом зависимость скорости кинка после прохождения области дефекта υ_k от υ_0 в области $\upsilon_0 > \upsilon_{\min}$ хорошо описывается формулой, аналогичной полученной для случая точечного дефекта [3].

$$\upsilon_k = \alpha\left(\upsilon_0^2 - \upsilon_{\min}^2\right) \tag{3}$$

где α – некоторая константа (для случая рис.2а $\alpha = 1.02636$, а для случая рис.2б $\alpha = 1.06677$).

Можно для каждого рефракционного «окна», полученного на рис.2, определить среднее значение скорости – υ_n, где n – порядковый номер окна. Тогда положение резонансных окон отражения хорошо описывается формулой:

$$\upsilon_n^2 \approx \upsilon_{\min}^2 - \frac{C_1}{\left(\dfrac{2\pi n}{\omega_{br}} + C_2\right)^2},\ n = 1,2,3,4,... \tag{4}$$

где ω_{br} – частота колебаний бризера, возбуждаемого в области дефекта, C_1 и C_2 – некоторые константы. Для случая рис.2а значение пороговой скорости составляет $\upsilon_{\min} = 0.24431$, характерная (усредненная) частота колебаний бризера $\omega_{br} = 0.9634$, значения констант – $C_1 = 8.99038$, $C_2 = 25.40903$. Для случая рис.2б – $\upsilon_{\min} = 0.2884$, $\omega_{br} = 0.9092$, $C_1 = 10.5478$, $C_2 = 21.12987$. Отметим, что значения введенных феноменологических констант C_1 и C_2 существенно зависят от значений параметров ΔK и W. Для рассмотренных случаев рис.2 максимальная приведенная погрешность между значением υ_n, найденным численно и по формуле (4) составляет $\delta_{\max} = 0.02\%$. Заметим также, что формула вида (4) получена ранее в работе [3] для случая отражения кинка от точечного дефекта.

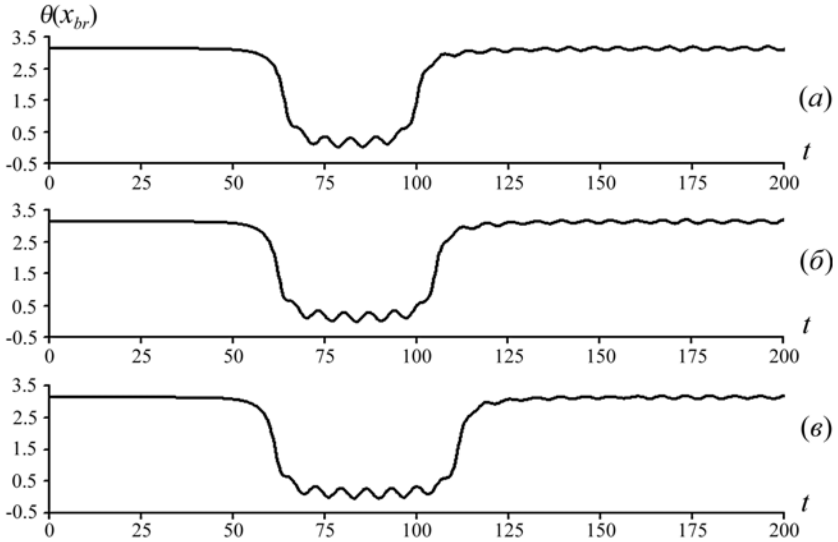

Рис.3. Зависимость значения $\theta(x_{br})$ в центре области дефекта от времени t при $W = 1$, $K = 0.8$ для различных начальных скоростей движения кинка x_0: (*а*) – $\upsilon_0 = \upsilon_0^{I} = 0.22539$, (*б*) – $\upsilon_0 = \upsilon_0^{II} = 0.23174$, (*в*) – $\upsilon_0 = \upsilon_0^{II} = 0.23525$

Можно непосредственно показать, что такое необычное поведение кинка (отражение кинка от притягивающего потенциала), связано именно с резонансным обменом энергией между ним и возбуждаемым в области дефекта бризером. Для этого рассмотрим три соседних резонансных значения начальной скорости $\upsilon_0^{I} = 0.22539$, $\upsilon_0^{II} = 0.23174$, $\upsilon_0^{III} = 0.23525$ (см. рис.2а при n = 1,2,3). Из рис.3 видно, что с постепенным увеличением порядка щели (число n) число полных периодов колебаний бризера возрастает на единицу. Необходимо отметить также, что аналогичное поведение характерно и для ширины кинка (частота ее колебаний примерно совпадает с частотой бризера, и с момента возбуждения они осциллируют «синхронно»). Механизм данного явления можно описать так: при прямом прохождении кинка в области дефекта возбуждается бризер («примесная мода») и пульсационная мода колебаний кинка, частоты колебаний которых примерно совпадают. Через определенный промежуток времени под действием притягивающего потенциала дефекта кинк полностью останавливается и начинает двигаться в обратном направлении. Если интервал времени с момента возбуждения бризера до взаимодействия его с пульсирующим кинком (или «время разворота кинка») кратен периоду колебаний примесной моды (с точностью до некоторой постоянной), то происходит отражение. Отметим, что принципиальная возможность такого резонансного взаимодействия солитонов была показана в работе [6] и для некоторых других нелинейных эволюционных уравнений.

Литература

1. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка, 1989, 304 с.
2. Лонгрен К., Скотт А. Солитоны в действии. М.: Мир, 1981, 312 с.
3. Браун О.М., Кившарь Ю.С. Модель Френкеля-Контровой. Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008, 536 с.
4. Ekomasov E.G., Shabalin M.A. Simulating the Nonlinear Dynamics of Domain Walls in Weak Ferromagnets. Phys. Metals Metallogr., 2006, V. 101, Suppl. 1, P. S48–S50.
5. Екомасов Е.Г., Азаматов Ш.А., Муртазин Р.Р. Изучение зарождения и эволюции магнитных неоднородностей типа солитонов и бризеров в магнетиках с локальными неоднородностями анизотропии. Физика металлов и металловедение, 2008, Т. 105, № 4, С. 341-349.
6. Белова Т.И., Кудрявцев А.Е. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля. Успехи физических наук, 1997, Т. 167, № 4, С. 377.
7. Fogel M.B., Trullinger S.E., Bishop A.R., Krumhandl J.A. Dynamics of sine-Gordon solitons in the presence of perturbations. Phys. Rev. B, 1976, V. 15, N 3, P. 1578-1592.

8. Gonzales J.A., Bellorin A., Guerrero I.E. Internal modes of sine-Gordon solitons with the presence of spatiotemporal perturbations. Phys. Rev. E, 2002, V. 65, 065601(R), P. 1-4.
9. Piette B., Zakrzewski W.J., Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells. J. Phys. A: Math. Theor, 2007, V. 40, P. 5995-6010.
10. Гумеров А.М., Екомасов Е.Г., Муртазин Р.Р. Моделирование динамики доменных границ в слабых ферромагнетиках. Хроники объединенного фонда электронных ресурсов <Наука и образование>, № 5, 2010. URL: http://ofernio.ru/portal/newspaper/ofernio/2010/5.doc (дата обращения: 11.05.2010).

Екомасов Евгений Григорьевич - Башкирский Государственный Университет, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики. Специалист в области физики твердого тела. ekomasoveg@bsu.bashedu.ru; Уфа, 450074, ул. Заки Валиди 32, тел.: +7 (347) 2739325, +7 (917) 3462278.

Гумеров Азамат Маратович - Башкирский Государственный Университет, аспирант кафедры теоретической физики. Специалист в области физики твердого тела. mail@laq.su; Уфа, 450074, ул. Заки Валиди 32; тел.: +7 (347) 2739325, +7 (987) 2525790.