

УДК 519.634

ТРАНСФОРМАЦИЯ СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА В МОДЕЛЯХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЗАТУХАНИЕМ

© 2015 г. А. М. Гумеров*, Е. Г. Екомасов*, Р. Р. Муртазин*, В. Н. Назаров**

(* 450076 Уфа, ул. З. Валиди, 32, Башкирский гос. ун-т;

** 450075 Уфа, пр-т Октября, 151, ИФМК УНЦ РАН)

e-mail: bgu@bk.ru; ekomasoveg@gmail.com

Поступила в редакцию 16.06.2014 г.

Переработанный вариант 06.10.2014 г.

Исследована динамика солитонов уравнения синус-Гордона при наличии внешней силы, затухания и пространственной модуляции периодического потенциала. С помощью численных методов показана возможность генерации локализованных нелинейных волн солитонного и бризерного типа. Изучена их эволюция и найдены зависимости амплитуды и частоты колебаний от параметров системы. Библ. 50. Фиг. 7.

Ключевые слова: кинк, бризер, солитон, уравнение синус-Гордона, пространственная модуляция периодического потенциала.

DOI: 10.7868/S0044466915040031

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы динамика солитонов привлекает все большее внимание исследователей (см. [1]), так как с ее помощью можно описать большое количество физических приложений (см. [2]–[4]). Например, солитоны уравнения синус-Гордона (УСГ) в физике твердого тела описывают доменные границы в магнетиках, дислокации в кристаллах, флюксоны в джозефсоновских контактах и т.д.

С точки зрения построения моделей, описывающих реальные физические процессы, интерес представляет вопрос изучения влияния различного вида возмущений на динамику и структуру солитонов УСГ. Например, много работ посвящено изучению влияния внешней силы, зависящей от координат и времени, и пространственной модуляции периодического потенциала (или ПМПП) (см., например, [2]–[9]). Если исследование влияния малых возмущений на решения УСГ можно проводить с помощью хорошо разработанной теории возмущений для солитонов [3]–[6], [9]–[10], то влияние больших возмущений, в общем случае можно проводить только с помощью численных методов (см. [6], [11]–[14]).

Рассмотрим модифицированное уравнение синус-Гордона, появляющееся, например, при описании динамики доменных границ в многослойных ферромагнетиках, следующего вида (см. [15]):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{1}{2} K(x) \sin 2\theta = h \sin \theta + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь $A(x)$ и $K(x)$ – некоторые функции, характеризующие пространственную модуляцию параметров, h – параметр внешней силы, α – константа затухания. Для случая произвольных изменений параметров K и A решение уравнения (1) можно получить только с помощью численных методов.

В случае $A(x) = K(x) = 1$, $h = \alpha = 0$ уравнение (1) переходит в известное уравнение синус-Гордона, которое имеет решение в виде кинка:

$$\theta(x, t) = 2 \arctg(\exp[\Delta(v_0)(x - v_0 t)]), \quad (2)$$

где $\Delta(v) = 1/\sqrt{1-v^2}$, v_0 – непрерывный параметр $0 < v_0 < 1$, определяющий скорость движения кинка. Есть также пространственно локализованные решения УСГ – покоящийся бризер:

$$\theta_{\text{breather}}(x, t, \omega) = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-\omega^2} \sin \omega t}{\omega \operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(x-x_0))} \right), \quad (3)$$

где ω – частота колебаний бризера, x_0 – координата его центра и солитонное решение вида

$$\theta_{\text{kink-antikink}}(x, t, \omega) = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{v_0} \frac{\operatorname{sh}[\Delta(v_0)t]}{\omega \operatorname{ch}(\Delta(v_0)(x-x_0))} \right). \quad (4)$$

Аналитическими и численными методами подробно изучена динамика солитонов УСГ для случая $A(x) = 1$, $h = \alpha = 0$ и “точечной ПМПП” ступенчатого вида $K(x) = 1 - \varepsilon \delta(x)$, где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $0 < \varepsilon < 1$ (см. [3]–[6], [16]). Показано, что в случае приближения “недеформируемого кинка” ПМПП действует как потенциал. При соответствующем знаке константы ε ($\varepsilon > 0$), она действует на кинк как притягивающий потенциал, поэтому солитоны УСГ могут быть локализованы и излучать. Учитывалась и возможность возбуждения локализованной моды при рассеянии кинка, существенно влияющая на его динамику. В [17]–[19] численно и аналитически показана возможность резонансного взаимодействия кинка с возбуждаемой локализованной модой, при взаимодействии с протяженной ПМПП. Анализ структуры и свойств, возбуждаемых на одно- и двумерной ПМПП, локализованных нелинейных волн, проведен численно в [20], [21]. Для случая двух одинаковых ПМПП в [22]–[24] показана возможность сильных коллективных эффектов и зарождения четырехкинковых состояний в системе. Изучались также процессы прохождения, захвата и отражения пары кинков при наличии ПМПП (см., например, [25], [26]).

В случае $A(x)$ и $K(x)$ изучена динамика кинка, с помощью теории возмущений и численных методов, при наличии точечной ПМПП ступенчатого вида и использующего дельта-функцию Дирака протяженной ПМПП прямоугольного вида [15], [27], [28]. В настоящей работе проведено исследование динамики кинка с учетом возможности возбуждения на области ПМПП высокоамплитудных нелинейных локализованных волн при наличии внешнего поля и затухания.

1. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим кинк вида (2), движущийся с постоянной скоростью v_0 и пересекающий область ПМПП. Пространственную модуляцию параметров $A(x)$ и $K(x)$ уравнения (1) будем моделировать, используя функцию гауссовского типа

$$K(x) = 1 + \Delta K \cdot \operatorname{ch}^{-2}(4(x-x_0)/W), \quad (5a)$$

$$A(x) = 1 + \Delta A \cdot \operatorname{ch}^{-2}(4(x-x_0)/W), \quad (5b)$$

где W – параметр, характеризующий ширину ПМПП, x_0 – положение ее центра, $\Delta K = K - 1$, K – значение параметра в точке x_0 , $\Delta A = A - 1$, A – значение параметра в точке x_0 . Граничные условия задавались в виде

$$\theta(-\infty, t) = 0, \quad \theta(+\infty, t) = \pi. \quad (6)$$

Точные решения (1) могут быть получены только в частных случаях, а аналитические методы (например, теория возмущений), как правило, работают лишь в ограниченных областях изменения параметров системы. На сегодняшний день разработано достаточно большое количество методов численного решения подобных уравнений. Например, в [29] используется компактная конечно-разностная схема и DIRKN-метод. Компактность первой схемы заключается в том, что ее рекуррентная формула для вычисления нового временного слоя содержит не более девяти точек шаблона, включая центральный узел, в окрестности которого аппроксимируются производные. Под DIRKN-методом понимается класс “диагонально-неявных методов Рунге–Кутты–Нистрёма” (подробнее об этих методах можно найти, например, в [30]). Авторы [31] предлагают для решения УСГ численный метод, использующий коллокации и радиально-базисные функции. В [32] используется метод линий. В ряде работ (см. [26], [33]–[35]) используются спектральный и псевдоспектральный методы Фурье для решения уравнений типа УСГ. В [36] представлена “бессеточная” схема с использованием “мультикватратной” квазиинтерполяции. Данный метод

не требует решения крупномасштабных систем линейных алгебраических уравнений. В других численных работах (см. [37], [38]) используются различные варианты методов, основанные на схеме “предиктор-корректор”. В работе [39] используется метод, основанный на воспроизводящих ядрах в гильбертовых пространствах.

В настоящей статье для численного решения уравнения (1) воспользуемся методом конечных разностей (см. [40]–[42]). Известно много вариантов данного метода, которые можно условно поделить на две группы “явных” и “неявных” методов. Выберем трехслойную явную схему решения, с аппроксимацией производных на пятиточечном шаблоне типа “крест”, который применялся ранее для более простых модификаций УСГ (см., например, [22], [23]). Аппроксимация исходного дифференциального уравнения на данном шаблоне позволяет получить конечно-разностное уравнение в виде

$$A(x_i) \frac{\theta_{i+1}^k - 2\theta_i^k + \theta_{i-1}^k}{\Delta x^2} + \frac{A(x_{i+1}) - A(x_{i-1}))}{2\Delta x} \frac{\theta_{i+1}^k - \theta_{i-1}^k}{2\Delta x} - \frac{\theta_i^{k+1} - 2\theta_i^k + \theta_i^{k-1}}{\tau^2} - \frac{f(x_i)}{2} \sin 2\theta_i^k = h \sin \theta_i^k + \alpha \frac{\theta_i^{k+1} - \theta_i^{k-1}}{2\tau}; \tag{7}$$

здесь Δx – шаг по координате, τ – шаг по времени. Данная численная схема является схемой второго порядка аппроксимации по Δx и τ , и обладает условной устойчивостью $(\tau/\Delta x) \leq 1/2$.

В нашем случае схема является “одношаговой”, использует сравнительно небольшое количество обращений к памяти и обладает потенциалом для оптимизации вычислительного алгоритма. Кроме того, используемая схема удобна тем, что с минимальными изменениями может быть адаптирована как для других модификаций одномерного уравнения типа (1), так и для многомерных вариантов УСГ.

Использование граничных условий (6) подразумевает задание жестких значений на краях сетки. Как показывает численное моделирование по итерационной схеме (7), происходит эффект отражения волн от края сетки, что вносит искажения в полученные результаты при длительном моделировании процесса. В подобных случаях (см., например, [43], [44]) обычно используется два подхода. Первый из них предполагает использование большой сетки по координате и ведение процесса исследования в ее центре до определенного критического момента времени, за которое излученные волны успеют дойти до границ сетки и после отражения, вернуться к центру. Идея второго способа заключается в “поглощении” волн в приграничной области, что более предпочтительно с точки зрения экономии вычислительных ресурсов. На сегодняшний день разработано много способов такого поглощения (см. [45]–[48]), в том числе, и для волновых уравнений второго порядка (см. [49]). Поведение волн вблизи границы, как правило, предлагается описывать специальными уравнениями (например, для реализации условий излучения Зоммерфельда см. [45]). Однако для уравнения (1) существует более простой способ, при котором диссипативный параметр α задается в виде кусочно-постоянной функции

$$\alpha = \begin{cases} 1, & x \leq x_{\text{left}} + D_{\text{diss}}, \quad x \geq x_{\text{right}} - D_{\text{diss}}, \\ \alpha_0, & x_{\text{left}} + D_{\text{diss}} < x < x_{\text{right}} - D_{\text{diss}}, \end{cases} \tag{8}$$

где D_{diss} – ширина области поглощения (как правило, составляет 3–5% от ширины всей моделируемой области), α_0 – значение диссипативного параметра в основной области. Использование (8) приводит к практически полному затуханию всех волн, дошедших до краев сетки.

Для оценки погрешности метода проведено сравнение результатов вычислений $\theta(x_i, t_n)$ для фиксированных x_i , при изменении t_k , используя уравнение (1) с его точным решением (2) (при $A(x) = K(x) = 1, h = \alpha = 0$). Абсолютную погрешность можно рассчитать по формуле

$$\Delta\theta = \left| \theta_{i,j}^n - 2\arctg[\exp((x_i - vt_k)/\Delta(v_0))] \right|, \tag{9}$$

а приведенную погрешность можно рассчитать по формуле

$$\varepsilon = \Delta\theta/X_n, \tag{10}$$

где X_n – нормирующее значение, определяется равным верхнему пределу измерений, в нашем случае $X_n = \pi$. Численное моделирование показало, что с течением времени идет накопление погрешности, но скорость ее роста достаточно медленная. Даже при больших значениях параметра $t = 500$ погрешность составляет $\varepsilon \approx 0.0125\%$.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КИНКА С ПРИМЕСЬЮ

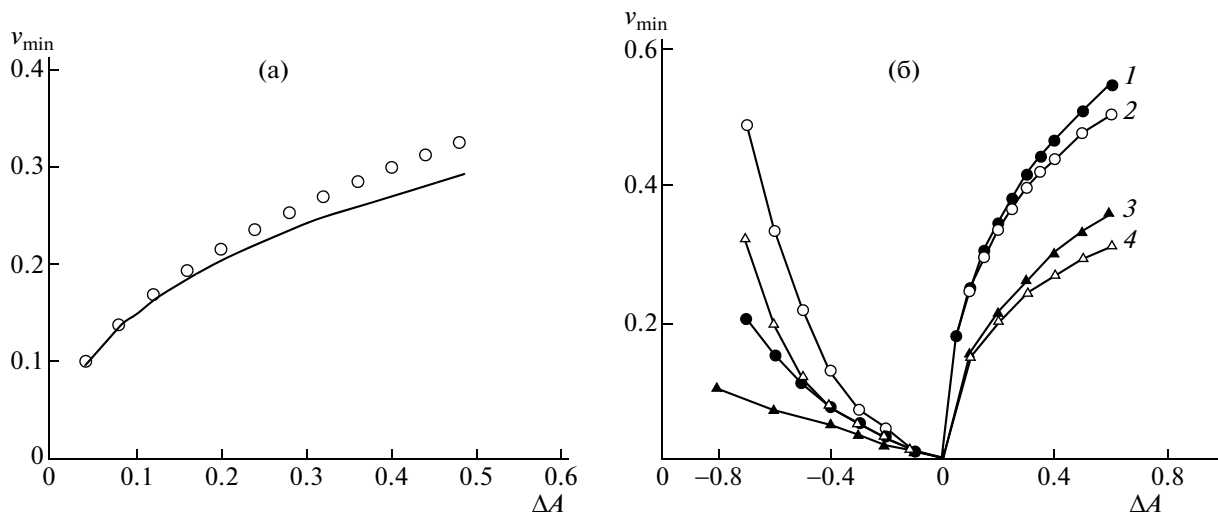
Далее, вначале рассмотрим движение кинка по инерции и без учета затухания. Как известно, ПМПП может создавать потенциальную яму, либо потенциальный барьер для движущегося кинка, и его энергия понижается или повышается вследствие взаимодействия с примесью. Определенная численно зависимость минимальной скорости $v_{\min}(\Delta A, \Delta K)$, с которой кинк может пройти через область ПМПП, приведена на фиг. 1. Результаты численных расчетов показывают, что влияние параметра ΔK оказывает заметно большее влияние на значение v_{\min} , чем параметр ΔA (см. кривые 1 и 2, 3 и 4 на фиг. 1б). Кривые на фиг. 1б при $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$, где $\Delta = \Delta A + \Delta K$, несимметричны. Это можно объяснить тем, что при преодолении “потенциальной ямы” в начальный момент времени скорость кинка, а следовательно, и его кинетическая энергия, увеличиваются. Таким образом, кинк выходит из области ПМПП с большей скоростью, чем была в начале, уменьшая тем самым значение v_{\min} . В случае “потенциального барьера”, наоборот, скорость кинка при подходе к области ПМПП вначале уменьшается, тем самым увеличивая значение v_{\min} . Для случая $\Delta A + \Delta K < 0$, в отличие от аналитического случая, при скоростях кинка, меньших значений v_{\min} , происходит локализация кинка на потенциальной яме (фиг. 2). Наблюдается со временем изменение структуры кинка. Помимо возбуждения трансляционной моды кинка, связанной с колебаниями его центра масс, имеет место и возбуждение пульсационной моды, связанной с изменением ширины кинка.

Для тестирования правильности работы численной схемы проведем аналитическое решение возмущенного уравнения синус-Гордона (1), используя решение вида (2), с зависящей от времени скоростью $u(t)$:

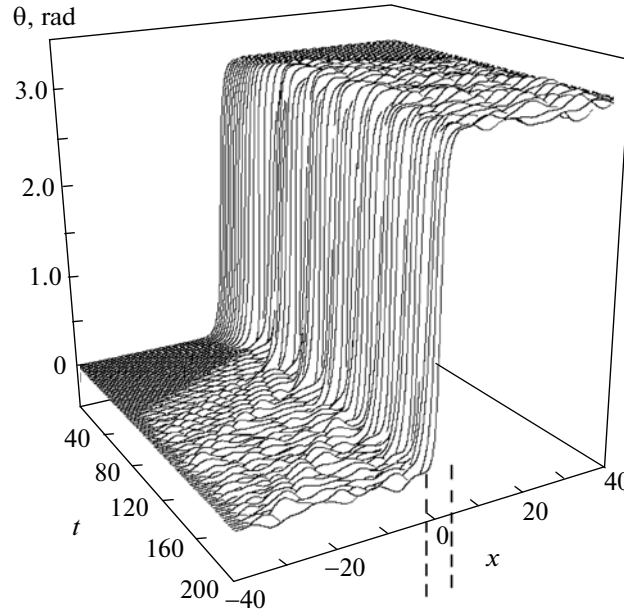
$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left(\exp \left(\pm \frac{x - X(t)}{\sqrt{1 - u^2(t)}} \right) \right), \quad (11)$$

$$X(t) = \int_0^t u(t_1) dt_1 + x_0(t). \quad (12)$$

Будем рассматривать движение кинка с достаточно малой скоростью, тогда использование решения вида (12) является традиционным и вполне оправданным.



Фиг. 1. Зависимость минимальной скорости кинка v_{\min} от: а – для параметра ΔA при $\Delta K = 0$, $W = 1$, $h = 0$, $\alpha = 0$ (точки – решение системы уравнений (13), (14), сплошная линия – численное решение уравнения (1)); б – для параметра $\Delta = \Delta K + \Delta A$ (1 – $\Delta A = 0$, $W = 4$; 2 – $\Delta K = 0$, $W = 4$; 3 – $\Delta A = 0$, $W = 1$; 4 – $\Delta K = 0$, $W = 1$).



Фиг. 2. Локализация кинка в области ПМПП (ограниченной штрихованными линиями), при $\Delta K = 0$, $\Delta A = -0.5$, $W = 4$, $\nu = 0.1$, $h = 0$.

С помощью теории возмущений (в адиабатическом приближении) [50] можно получить систему уравнений для $u(t)$ и $X(t)$:

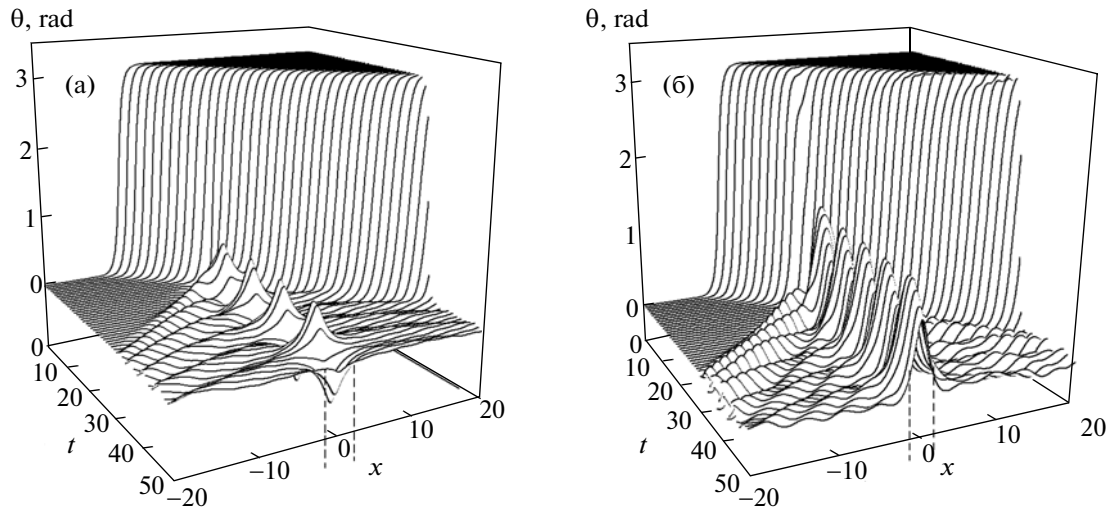
$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & h(1-u^2)^{3/2} + \frac{1}{2}(\Delta A + \Delta K(1-u^2))\sqrt{1-u^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\text{ch}^2(\psi z\sqrt{1-u^2} + \psi X)} \frac{\text{sh } z}{\text{ch}^3 z} dz + \\ & + \Delta A \psi (1-u^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh}(\psi z\sqrt{1-u^2} + \psi X)}{\text{ch}^3(\psi z\sqrt{1-u^2} + \psi X)} \frac{1}{\text{ch}^2 z} dz - \alpha u(1-u^2), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} = & u + \frac{u}{2}(\Delta A + \Delta K(1-u^2)) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\text{ch}^2(\psi z\sqrt{1-u^2} + \psi X)} \frac{\text{sh } z}{\text{ch}^3 z} dz + \\ & + \Delta A \psi u \sqrt{1-u^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh}(\psi z\sqrt{1-u^2} + \psi X)}{\text{ch}^3(\psi z\sqrt{1-u^2} + \psi X)} \frac{z}{\text{ch}^2 z} dz - \alpha u(1-u^2), \end{aligned} \tag{14}$$

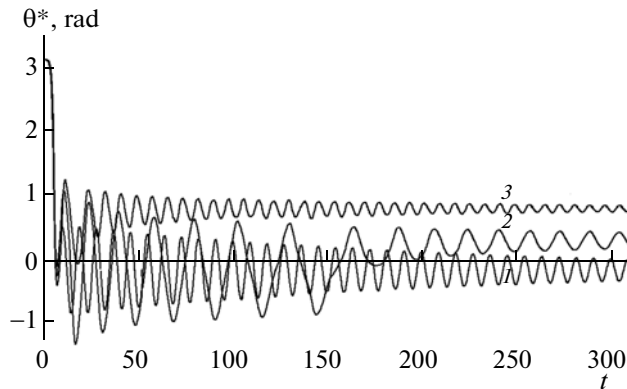
где $\psi = 4/W$. Система уравнений (13), (14) позволяет описать изменение во времени $X(t)$ и $u(t)$. Систему уравнений (13), (14) будем решать численно, методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом 0.01. Из фиг. 1а видно, что для малых ПМПП результаты решения системы уравнений (13), (14) хорошо совпадают с результатами численного решения уравнения (1).

При рассмотрении динамики пересечения кинком области ПМПП было обнаружено, что в этой области возникают локализованные высокоамплитудные нелинейные волны типа солитонов и бризеров. Результаты численных расчетов показывают, что в зависимости от величин K , A и W наблюдаются различные сценарии зарождения и эволюции таких волн. Хотя время прохождения кинка через область ПМПП мало (составляет порядка десяти временных единиц), сам “переходный” процесс сопровождается заметным изменением скорости движения и структуры кинка. Все результаты, представленные далее, приводились для случая $\alpha = 0.01$ и $h = 0.016$. Выбор $h = 0.016$ объясняется необходимостью разогнать кинк до скорости стационарного движения, необходимой для пересечения области ПМПП с рассматриваемым набором параметров K , A и W .

На фиг. 3а приведена типичная картина динамики кинка. В области ПМПП после ухода кинка возникает нелинейная волна. Амплитуда ее максимальна в центре области ПМПП и колеб-



Фиг. 3. Зарождение и эволюция в области ПМПП (ограниченной штрихованными линиями): а – для покоящегося бризера для случая $A = 0.6$, $K = -1$, $W = 2$; б – солитона для случая $A = 0.6$, $K = -4$, $W = 2$.



Фиг. 4. Зависимость θ^* – значения функции в центре области ПМПП от времени для случая $A = 0.6$, $W = 2$ ($1 - K = -1$, $2 - K = -2.3$, $3 - K = -4$).

лется от $+\theta_{\max}^*$ до $-\theta_{\max}^*$. Заметим, что величина амплитуды сильно зависит от значений параметров K , A и W . На фиг. 4 (кривая 1) для случая, рассмотренного на фиг. 3, приведена зависимость величины функции $\theta^*(t)$ в центре области ПМПП от времени. Видно, что эта функция периодическая с частотой колебаний $\omega = 0.72$. Совпадение полученной численно функции $\theta^*(t)$ с формулой (3), с учетом затухания в ней со временем амплитуды по формуле:

$$\theta = \theta_{\max}^* \exp(-\alpha(t - t_0)), \quad (15)$$

где $\theta_{\max}^* = 0.6$, $x_0 = 0$, позволяют в дальнейшем считать полученную в данном случае локализованную нелинейную волну типа “покоящегося бризера”. Из фиг. 3 также видно, что затухание бризера происходит вследствие излучения объемных волн. Полученный из аппроксимации зависимости θ^* от времени декремент затухания оказался практически равным задаваемому α , т.е. излучение в данном случае является одним из существенных каналов для диссипации энергии бризера.

При увеличении параметров $(1 - A)$, $(1 - K)$ и W до определенного значения эволюция зарождающегося “покоящегося бризера” меняется. На графике фиг. 4 видно, что, начиная с $t = 160$, колебания функции $\theta^*(t)$ продолжают только в области положительных значений θ . Отметим, что частота колебаний солитона, в который преобразуется бризер, существенно больше бризерной.

При дальнейшем увеличении параметров $(1 - A)$, $(1 - K)$ и W после ухода кинка в области ПМПП сразу появляется колеблющийся солитон (фиг. 3б, кривая 3 на фиг. 4). Если амплитуда бризера стремится к нулю со временем, то амплитуда солитона стремится к некоторому постоянному значению $-\theta^*$. Полученную численно зависимость θ^* от параметров A , K и W для ПМПП вида (5) можно приближенно описать формулой

$$\cos \theta^* \approx 4 \cdot A^n / (|K| \cdot W^m), \tag{16}$$

где $n = 0.13$ и $m = 0.93$. Частота колебаний солитона ω_s , как и частоты колебаний трансляционной и пульсационной мод кинка, стремится к единице при увеличении величины $(1 - K)$ и W для всех рассмотренных значений параметра A . Увеличение параметра A по сравнению с единицей приводит к уменьшению величины ω_s , а уменьшение параметра A по сравнению с единицей приводит к увеличению величины ω_s .

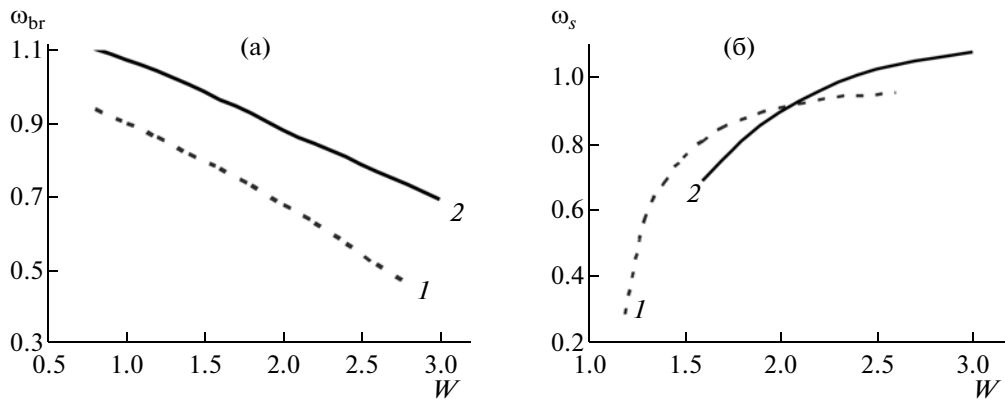
Определены области значений параметров A и K , определяющих возможность существования бризеров и солитонов. Качественно вид зависимости, по сравнению со случаем $A = 1$ (см. [20]), не меняется. С увеличением величины параметра A происходит сдвиг кривых в область больших значений параметров $|K|$ и W .

Теперь рассмотрим случай отличной от нуля внешней силы и затухания. Заметим также, что в этом случае мы получаем двойное УСГ, имеющее свое кинковое решение. Схема численного эксперимента следующая: в начальный момент времени задаем кинк двойного УСГ, находящийся в центре примеси, стабилизирующей его положение. После численной перестройки структуры кинка, под действием примеси, прикладывается внешняя постоянная сила, под действием которой кинк срывается из области ПМПП и начинает движение. Далее, после ухода кинка наблюдаем за изменением структуры нелинейных волн в этой области.

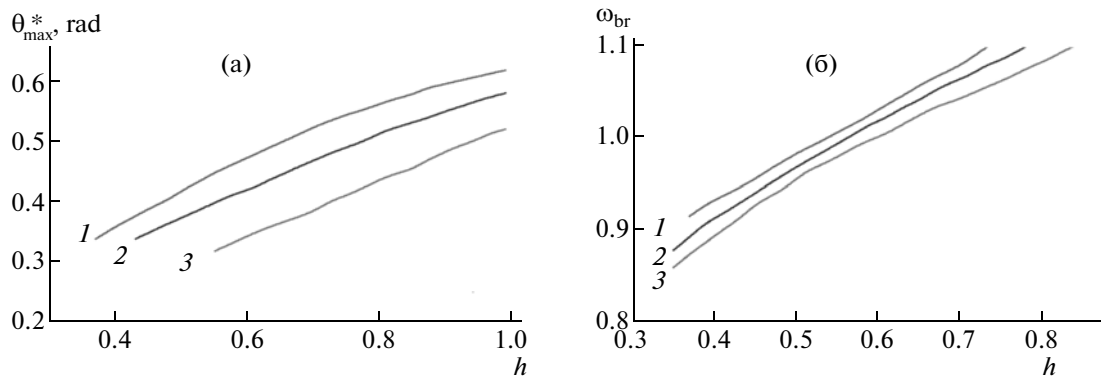
Численные расчеты производились для различных значений параметров ПМПП вида (5) и $\alpha = 0.01$. Величина $h = 0.35$ выбрана так, что если взять величину h меньше этого значения, то внешняя сила не сможет обеспечить срыв кинка из области ПМПП, так как у него не хватит энергии, чтобы выйти из потенциальной ямы.

При рассмотрении динамики выхода кинка из области ПМПП, аналогично исследованному выше случаю бездиссипативного движения по инерции, было обнаружено, что также в этой области возникают бризер, бризер, переходящий в солитон, и солитон. Частоты и амплитуды колебаний локализованных магнитных неоднородностей типа бризера или солитона определяли следующим образом: находили точку со значением $d\theta/dx = 0$, получали номер узла сетки i_0 , соответствующей данной точке. При выполнении условия $\theta_{i_0}^k > \theta_{i_0}^{k+1}$ и $\theta_{i_0}^k > \theta_{i_0}^{k-1}$ фиксировали значение времени $t_1 = t_k$, соответствующее максимальному значению $\theta(x, t) = \theta_{\max}$, далее фиксировали значение времени $t_2 = t_k$ при выполнении условия $\theta_{i_0}^k < \theta_{i_0}^{k+1}$ и $\theta_{i_0}^k < \theta_{i_0}^{k-1}$, соответствующего максимальному значению $\theta(x, t) = \theta_{\min}$. Разница $t_2 - t_1$ соответствовала половине периода колебаний, период и циклическая частота определялись по формулам $T = 2(t_2 - t_1)$, $\omega = 2\pi/T$, амплитуда колебаний соответствовала величине $(\theta_{\max} - \theta_{\min})/2$. Зависимости амплитуды и частоты колебаний от параметров K , A и W оказались аналогичны случаю $h = 0$, рассмотренному выше.

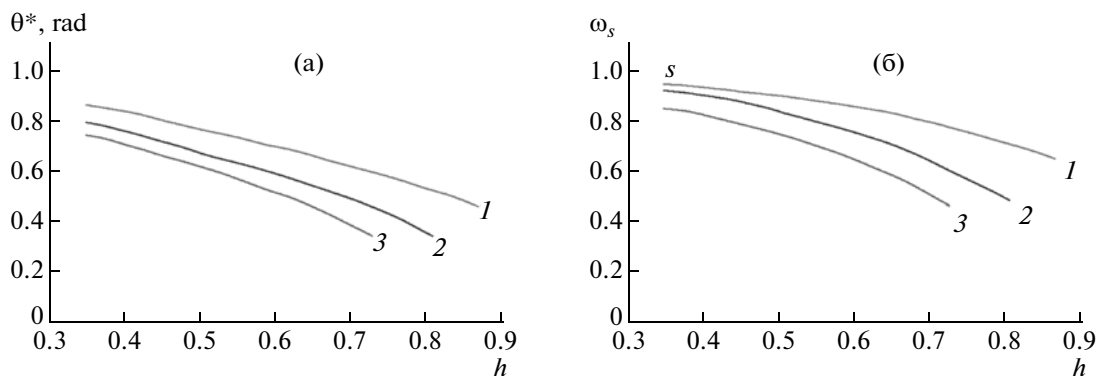
На фиг. 5 приведены зависимости частоты колебаний солитона и бризера от параметра W для двух разных значений внешней силы. Первая кривая была получена при $h = 0.016$, а вторая кривая при $h = 0.35$. Из фиг. 5а (случай бризера) видно, что кривые практически параллельны друг другу, кривая с большим значением h лежит выше. Разница между значениями частот для разных случаев h не менее 15%. Как видно из фиг. 5б (случай солитона), кривые пересекаются, что говорит о сильном влиянии, в данном случае внешней силы, и на вид самой зависимости. Кривая, полученная для случая $h = 0.35$, начинает располагаться выше только при W , большем двух. Отметим также, что при увеличении h солитон начинает зарождаться при больших значениях параметров K , A и W . Из фиг. 6, 7 видно, что можно эффективно управлять с помощью внешней силы динамическими параметрами локализованных нелинейных волн. Так, зависимость частоты колебаний бризера ω_{br} от h (см. фиг. 6б) близка к линейной, а частоты колебаний солитона $\omega_s(h) \sim \omega_0 - (ah)^b / \sqrt{1 + (ah)^{2b}}$, где a и b – константы, $a, b > 0$, ω_0 – частота колебания солитона при $h = 0$ (фиг. 7б). Зависимость амплитуды колебаний бризера θ^* от h (см. фиг. 6а) аналогична ча-



Фиг. 5. Зависимость частоты колебания: а – для бризера от параметра W при $A = 1$, $K = -4$ солитона от параметра W при $A = 1$, $K = -1.2$; б – для солитона от параметра W при $A = 1$, $K = -1.2$. (1 – при $h = 0.016$; 2 – при $h = 0.35$).



Фиг. 6. Зависимость максимальной амплитуды θ_{\max}^* : а – для частоты колебания ω_{br} , б – для бризера от величины h , при $W = 2$, $K = -1.2$ (1 – $A = 1.4$, 2 – $A = 1$, 3 – $A = 0.6$).



Фиг. 7. Зависимость максимальной амплитуды θ^* : а – для частоты колебания ω_s , б – для солитона от величины h при $W = 2$, $K = -4$ (1 – $A = 1.4$, 2 – $A = 1$, 3 – $A = 0.6$).

стотной и близка к линейной. Так же аналогична частотной и зависимость амплитуды колебаний солитона от h (см. фиг. 7а).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована динамика кинков уравнения синус-Гордона при наличии внешней силы, затухания и пространственной модуляции периодического потенциала. Вычислена минимальная

скорость, необходимая кинку для прохождения через область пространственной модуляции периодического потенциала. Показано, в каких случаях численные результаты хорошо согласуются с аналитическими. Численными методами изучен процесс зарождения, структура и характеристики высокоамплитудных локализованных нелинейных волн солитонного и бризерного типа. Рассмотрено влияние внешней силы на возбуждаемые локализованные нелинейные волны. Найдены зависимости частот и амплитуд колебаний от параметров системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Encyclopedia of nonlinear science. Scott A. (ed.). New York: Routledge, 2004.
2. Шамсутдинов М.А., Назаров В.Н., Ломакина И.Ю. и др. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. М.: Наука, 2009.
3. Браун О.М., Квишарь Ю.С. Модель Френкеля-Конторовой: Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008.
4. Dauxois T., Peyrard M. Physics of solitons. New York: Cambridge University Press, 2010.
5. Fogel M.B., Trullinger S.E., Bishop A.R., Krumhandl J.A. Dynamics of sine-Gordon solitons in the presence of perturbations // Phys. Rev. B. 1977. V. 15. P. 1578–1592.
6. Currie J.P., Trullinger S.E., Bishop A.R., Krumhandl J.A. Numerical simulation of sine-Gordon soliton dynamics in the presence of perturbations // Phys. Rev. B. 1977. V. 15. № 12. P. 5567–5580.
7. Goodman R.H., Holmes P.J., Weinstein M.I. Interaction of sine-Gordon kinks with defects: Phase space transport in a two-mode model // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2002. V.161. № 1. P. 21–44.
8. González J.A., Bellorin A., Guerrero L.E. Internal modes of sine-Gordon solitons in the presence of spatiotemporal perturbations // Phys. Rev. E (Rapid Communications). 2002. V. 65. P. 065601.
9. Nazifkar S., Javidan K. Collective coordinate analysis for double sine-Gordon model // Brazilian J. Phys. 2010. V. 40. № 1. P. 102–107.
10. González J.A., Cuenda S., Sánchez A. Kink dynamics in spatially inhomogeneous media: The role of internal modes // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. P. 036611.
11. Bratsos A.G. The solution of the two-dimensional sine-Gordon equation using the method of lines // J. Comput. Appl. Math. 2007. V. 206. № 1. P. 251–277.
12. Fabian A.L., Kohl R., Biswas A. Perturbation of topological solitons due to sine-Gordon equation and its type // Commun. Nonlinear Sci. Numerical Simulation. 2009. V. 14. № 4. P. 1227–1244.
13. Batiha B., Noorani M.S.M., Hashim I. Numerical solution of sine-Gordon equation by variational iteration method // Phys. Lett. A. 2007. V. 370. № 5. P. 437–440.
14. Ablowitz M.J., Herbst B.M., Schober C.M. On the Numerical Solution of the Sine-Gordon Equation // J. Comput. Phys. 1997. V. 131. № 2. P. 354–367.
15. Paul D.I. Soliton theory and the dynamics of a ferromagnetic domain wall // J. Phys. C: Solid State Phys. 1979. V. 12. P. 585–593.
16. Knight C.J.K., Derks G., Doelman A., Susanto H. Stability of stationary fronts in a nonlinear wave equation with spatial inhomogeneity // J. Different. Equat. 2013. V. 254. № 2. P. 408–468.
17. Piette B., Zakrzewski W.J., Brand J. Scattering of topological solitons on holes and barriers // J. Phys. A: Mathematical and General. 2005. V. 38. № 48. P. 10403–10412.
18. Piette B., Zakrzewski W.J. Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells // J. Physics A: Mathematical and Theoretical. 2007. V. 40. P. 5995–6010.
19. Екомасов Е.Г., Гумеров А.М. Моделирование взаимодействия нелинейных волн в модели синус-Гордона для материалов с дефектами // Перспективные материалы. 2011. № 12. С. 104–108.
20. Екомасов Е.Г., Азаматов Ш.А., Муртазин Р.Р. Изучение зарождения и эволюции магнитных неоднородностей типа солитонов и бризеров в магнетиках с локальными неоднородностями анизотропии // Физ. металлов и металловедение. 2008. Т. 105. № 4. С. 341–349.
21. Екомасов Е.Г., Гумеров А.М., Муртазин Р.Р. et al. Excitation of high-amplitude localized nonlinear waves as a result of interaction of kink with attractive impurity in sine-Gordon equation // arXiv:1307.3470 [nlin.PS]. 2013.
22. Екомасов Е.Г., Гумеров А.М., Муртазин Р.Р. Коллективное влияние примесей на динамику кинков модифицированного уравнения синус-Гордона // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5. № 3. С. 403–412.
23. Гумеров А.М., Екомасов Е.Г., Закирьянов Ф.К., Кудрявцев Р.В. Структура и свойства четырехкинковых мультисолитонов уравнения синус-Гордона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 3. С. 481–495.
24. Екомасов Е.Г., Гумеров А.М., Рахматуллин И.И. Численное моделирование пиннинга и нелинейной динамики доменных границ в ферромагнетиках с дефектами // Вестн. Башкирского ун-та. 2010. Т. 15. № 3. С. 564–566.

25. *Goatham S.W., Mannering L.E., Hann R., Krusch S.* Dynamics of multi-kinks in the presence of wells and barriers // *Acta Physica Polonica B.* 2011. V. 42. № 10 P. 2087–2106.
26. *Понов С.П.* Влияние дислокаций на кинковые решения двойного синус-Гордона уравнения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2013. Т. 53. № 12. С. 2072–2081.
27. *Екомасов Е.Г., Муртазин Р.Р., Богомазова О.Б., Альмухаметова А.Р.* Нелинейная динамика кинков уравнения синус-Гордона при наличии локализованной пространственной модуляции параметров системы // *Вестн. Башкирского ун-та.* 2012. Т. 17. № 2. С. 847–852.
28. *Ekomasov E.G., Murtazin R.R., Bogomazova O.B., Gumerov A.M.* One-dimensional dynamics of domain walls in two-layer ferromagnet structure with different parameters of magnetic anisotropy and exchange // *J. Magn. Magn. Mater.* 2013. V. 339. P. 133.
29. *Mohebbi A., Dehghan M.* High-order solution of one-dimensional sine-Gordon equation using compact finite difference and DIRKN methods // *Math. Comput. Modell.* 2010. V. 51. № 5–6. P. 537–549.
30. *Van der Houwen P.J., Sommeijer B.P., Cong N.H.* Parallel diagonally implicit Runge-Kutta-Nystrom methods // *Appl. Numerical Math.* 1992. V. 9. № 2. P. 111–131.
31. *Dehghan M., Shokri Ali.* Numerical method for one-dimensional nonlinear Sine-Gordon equation using collocation and radial basis functions // *Numerical Meth. for Partial Different. Equat.* 2008. V. 24. № 2. P. 687–698.
32. *Bratsos A.G., Twizell E.H.* The solution of the sine-gordon equation using the method of lines // *Intern. J. Comput. Math.* 1996. V. 61. № 3–4. P. 271–292.
33. *Soori Zoleikh, Aminataei Azim.* The spectral method for solving sine-Gordon equation using a new orthogonal polynomial // *Appl. Math.* V. 2012. Article ID 462731, 12 pages doi:10.5402/2012/462731
34. *Alfimov G.L., Evans W.A.B., Vázquez L.* On radial sine-Gordon breathers // *Nonlinearity.* 2000. V. P. 1657–1680.
35. *Понов С.П.* О применении квазиспектрального метода Фурье к солитонсодержащим уравнениям // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. Т. 50. № 12. С. 1–8.
36. *Li-Min Ma, Zong-Min Wu.* A numerical method for one-dimensional nonlinear sine-Gordon equation using multiquadric quasi-interpolation // *Chinese Physics B.* 2009. V. 18. № 8. P. 3099.
37. *Bratsos A.G.* A numerical method for the one-dimensional sine-Gordon equation // *Numer. Meth. Partial Differential Equat.* 2008. V. 24. № 3. P. 833–844.
38. *Khaliq A.Q.M., Abukhodair B., Sheng Q., Ismail M.S.* A predictor–corrector scheme for the sine-Gordon equation // *Numer. Meth. Partial Differen. Equat.* 2000. V. 16. № 2. P. 133–146.
39. *Akgul A., Inc M.* Numerical solution of one-dimensional Sine–Gordon equation using Reproducing Kernel Hilbert Space Method [Electronic resource] // arXiv:1304.0534 [math.NA]. 2013. URL: <http://arxiv.org/abs/1304.0534v1>.
40. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
41. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
42. *Кунин С.* Вычислительная физика. М.: Мир, 1992. 518 с.
43. *Ferreira L.A., Piette B., Zakrzewski W.J.* Wobbles and other kink-breather solutions of sine-Gordon model // *Phys. Rev. E.* 2008. V. 77. P. 036616.
44. *Kalberman G.* The sine-Gordon wobble // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2004. V. 37. P. 11603–11612.
45. *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.* Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2012. Т. 52. № 6. С. 1063–1068.
46. *Chang WenFong, McMechan G.A.* Absorbing boundary conditions for 3D acoustic and elastic finitedifference calculations // *Bulletin of the Seismological Society of America.* 1989. V. 79. № 1. P. 211–218.
47. *Engquist B., Majda A.* Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations // *Commun. on Pure and Appl. Math.* 1979. V. 32. № 3. P. 313–357.
48. *Константинов А.А., Маслов В.П., Чеботарев А.М.* Снос краевых условий для уравнений с частными производными // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1988. Т. 28. № 12. С. 1763–1778.
49. *Higdon R.L.* Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation // *Math. Comput.* 1987. V. 49. № 179. P. 65–90.
50. *Шиховцева Е.С., Назаров В.Н.* Влияние нелинейного продольного сжатия на конформационную динамику бистабильных квазиодномерных макромолекул // *Письма в ж. экспериментальной и теор. физ.* 2007. Т. 86. № 8. С. 569–573.