

УДК 519.634

## СТРУКТУРА И СВОЙСТВА ЧЕТЫРЕХКИНКОВЫХ МУЛЬТИСОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА

© 2014 г. А. М. Гумеров, Е. Г. Екомасов, Ф. К. Закирьянов, Р. В. Кудрявцев

(450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32, Башкирский гос. ун-т)

e-mail: bgu@bk.ru; ekomasoveg@gmail.com; farni@rambler.ru

Поступила в редакцию 26.07.2013 г.  
Переработанный вариант 24.09.2013 г.

С помощью аналитических и численных методов исследована динамика нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с пространственной модуляцией периодического потенциала. Определены структура и свойства возбуждаемых в области двух одинаковых притягивающих примесей четырехкинковых мультисолитонов. Для случая малых колебаний полученный аналитический спектр колебаний качественно соответствует результатам численных расчетов. Библ. 44. Фиг. 9. Табл. 1.

**Ключевые слова:** уравнение синус-Гордона, четырехкинковые мультисолитоны, структура и свойства солитонов, численно-аналитическое исследование.

DOI: 10.7868/S0044466914030077

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение синус-Гордона (УСГ), решение которого имеет вид нелинейных уединенных волн — солитонов, интенсивно используется в различных областях науки, например, для описания волновых процессов в геологических средах, динамики ДНК в молекулярной биологии, динамики доменных границ в магнетиках, дислокаций в кристаллах и флюксонов в джозефсоновских контактах и переходах (см. [1]–[6]). Во многих случаях поведение солитонов можно описать в рамках модели точечной частицы, тогда их временная эволюция будет подчиняться обыкновенным дифференциальным уравнениям (см. [7]). Учет влияния возмущений приводит к существенному изменению структуры солитонов, которые уже нужно описывать как деформируемые частицы (см. [3]). При этом для солитонов характерно возбуждение внутренних степеней свободы, которые могут играть определяющую роль в некоторых физических процессах. Внутренние моды включают в себя трансляционную и, связанную с долгоживущими осцилляциями ширины солитона, пульсационную моду (см. [8]).

Большой интерес вызывает вопрос влияния различного вида возмущений на возбуждение внутренних мод солитонов УСГ. Исследование влияния малых возмущений на решения УСГ можно проводить с помощью разработанной теории возмущений для солитонов (см. [3], [7], [9], [10]), а влияние больших возмущений, в общем случае, можно проводить только с помощью численных методов (см. [11]–[14]). Так как УСГ описывает многие явления в различных областях физики и техники, ясно, что задача о решении данного уравнения в присутствии локальных неоднородностей возникает вполне естественно (см., например [3]). Например, много работ посвящено изучению влияния зависящей от координат и времени внешней силы, описываемой функциями дельтообразного, ступенчатого, гиперболического и гармонического видов (см. [15]–[18]).

Не менее интересен и случай пространственной модуляции (неоднородности) периодического потенциала, или наличие примеси в системе (см. [3], [7]). Проблема взаимодействия кинков УСГ с примесями для одномерного случая обсуждается в литературе достаточно давно (см. [3], [9], [11], [19]). Например, модель классической частицы для взаимодействия кинка с примесью применима в случае, когда примесь не допускает существования примесной моды — локализованного колебательного состояния на примеси. Важность примесных мод при взаимодействии кинка с примесями показана в [14], [17], [20]–[25]. Исследуется в последнее время взаимодействие кинка с примесью и для двумерного случая (см. [26]–[28]). Большое внимание исследователей привлекают и мультисолитонные решения УСГ [21], [29].

Рассмотрим модифицированное УСГ следующего вида (см. [3], [7], [9]):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{K(x)}{2} \sin 2\theta = 0, \quad (1)$$

где  $K(x)$  — функция, характеризующая пространственную модуляцию периодического потенциала (или “примесь”). Данная задача интересна с точки зрения многих физических приложений, например, для движущихся доменных границ в ферромагнетиках с дефектами, когда  $K(x)$  может менять знак (см. [4]).

В случае  $K(x) = 1$  уравнение (1) переходит в известное УСГ и имеет решение в виде топологического солитона (или кинка)

$$\theta(x, t) = 2 \operatorname{arctg}(\exp[\Delta(\vartheta_0)(x - \vartheta_0 t)]), \quad (2)$$

где  $\Delta(\vartheta_0) = 1/\sqrt{1 - \vartheta_0^2}$ ,  $\vartheta_0$  — непрерывный параметр  $0 < \vartheta_0 < 1$ , определяющий скорость движения кинка. Есть также пространственно локализованное решение уравнения (1) — покоящийся бризер

$$\theta_{im}(x, t, \omega) = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1 - \omega^2} \sin(\omega t)}{\omega \operatorname{ch}(\sqrt{1 - \omega^2}(x - x_0))} \right),$$

где  $\omega$  — частота колебаний бризера,  $x_0$  — координата его центра.

В настоящее время аналитическими и численными методами подробно изучена динамика солитонов УСГ для случая “точечной примеси”:  $K(x) = 1 - \varepsilon \delta(x)$ , где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  $0 < \varepsilon < 1$  (см. [3], [7]). Показано, что в случае приближения “недеформируемого кинка”, наличие примеси эквивалентно присутствию некоторого эффективного потенциала. Так, при  $\varepsilon > 0$  примесь действует на кинк как притягивающий потенциал, при этом кинки УСГ могут быть локализованы в области примеси и излучать (см. [3]). В приближении “деформируемого кинка”, в дополнении к колебательному движению кинка на потенциале, создаваемом примесью, возникают эффекты деформации кинка (например, сильное изменение его формы), имеющие резонансный характер (см. [3]). Учитывалась и возможность возбуждения примесной моды при рассеянии кинка, приводящая к существенному изменению результатов динамики кинка (см. [14], [17], [21]). Отметим здесь такой интересный эффект, как отражение кинка притягивающей примесью из-за резонансного обмена энергией между трансляционной модой кинка и примесной модой. Рассматривался также случай нескольких точечных примесей дельтаобразного вида, представляющих интерес для некоторых физических приложений (см. [30], [31]) и даже случай пространственной модуляции периодического потенциала гармонического вида (см. [32]). Также аналитическими и численными методами (см. [9], [11], [33], [34]) исследована динамика кинков УСГ для  $K(x)$  ступенчатого вида. Для случая пространственно протяженной примеси, например, вида

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \quad x > W, \\ 1 - \Delta K, & 0 \leq x \leq W, \end{cases} \quad (3)$$

где  $W$  — ширина области пространственной модуляции периодического потенциала, также исследовалось взаимодействие кинка с примесью, как для недеформируемой, так и деформируемой модели кинка (см. [19], [22], [35]). Найдена зависимость скорости и структуры кинка, солитона и бризера от времени, минимальная скорость, необходимая кинку для преодоления потенциальной ямы.

Учет влияния на динамику кинков возбуждаемой на примеси нелинейной волны проведен численными методами в [22]. В [22], как и для точечной примеси, численно и аналитически показана возможность резонансного взаимодействия кинка с возбуждаемой примесной модой, причем задача решена без точного анализа изменения структуры кинка при взаимодействии с примесью. Анализ структуры и свойств, возбуждаемых на примеси локализованных нелинейных волн, проведен численно в [23].

Рассмотрены в рамках модели синус-Гордона также случай изотопической примеси (см. [14]), и нетривиальной метрики времени (см. [20], [36]).

Для случая двух одинаковых примесей (см. [37], [38]) показано наличие сильных коллективных эффектов в системе, которые можно использовать при пиннинге кинка на примеси для возбуждения мультисолитонов уравнения синус-Гордона, например, типа тритона и воббла (см. [38]). Также показана возможность еще одного интересного эффекта – так называемого “квазитуннелирования”, при котором кинку для прохождения через область двойной примеси требуется минимальная кинетическая энергия, меньшая, чем для прохождения одиночной примеси тех же размеров. Однако не до конца изучен вопрос о возбуждении, структуре и характеристиках мультисолитонов УСГ при наличии нескольких протяженных примесей. В настоящей работе исследуется вопрос о динамике кинков одномерной модели синус-Гордона с двумя одинаковыми пространственно протяженными примесями вида (3), с учетом возможности возбуждения локализованных высокоамплитудных нелинейных волн мультисолитонного типа.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Пространственную модуляцию периодического потенциала будем моделировать в следующем виде (см. [38]):

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \quad W < x < W + d, \quad x > 2W + d, \\ 1 - \Delta K, & 0 \leq x \leq W, \quad W + d \leq x \leq W + d, \end{cases} \quad (4)$$

т.е. в виде двух одинаковых примесей, расположенных на определенном расстоянии  $d$  друг от друга. Очевидно, что при  $\Delta K > 0$  примесь является потенциальной ямой для движущегося кинка, а при  $\Delta K < 0$  – потенциальным барьером.

Для рассматриваемых больших величин  $\Delta K$ , в общем случае, необходимо использовать численные методы. Численное решение уравнения (1) выполнено с помощью метода конечных разностей на основе явной пятиточечной схемы решения (см. [23], [37]–[39]), которая позволяет рассчитать сеточную функцию  $U_h$ , значения которой приблизительно совпадают с точным решением  $U = 2\theta$  в узлах сетки. В рамках данного метода решение уравнения (1) сводится к вычислению значений искомой функции в узлах заданной сетки с помощью рекуррентной формулы

$$U_i^{n+1} = C_2(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) + C_3 U_i^n + C_4 U_i^{n-1} - K^*(x) \sin U_i^n, \quad (5)$$

где введены следующие обозначения:

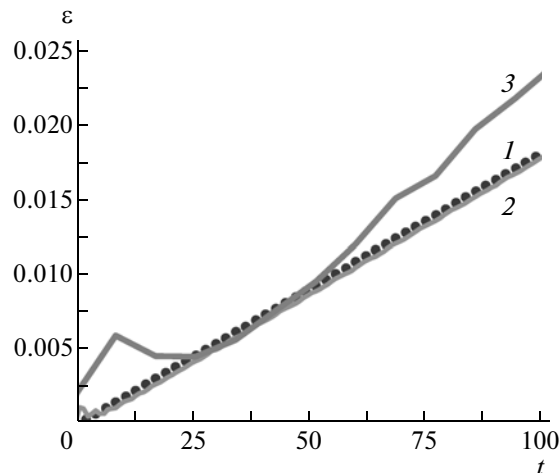
$$K^*(x) = C_1 K(x), \quad C_1 = \Delta t^2, \quad C_2 = \frac{C_1}{\Delta x^2}, \quad (6)$$

$$C_3 = C_1 \left( \frac{2}{\Delta t^2} - \frac{2}{\Delta x^2} \right), \quad C_4 = -\frac{C_1}{\Delta t^2};$$

здесь  $\Delta x$  – шаг по координате,  $\Delta t$  – шаг по времени. Введение функции  $K^*(x)$  позволяет предварительно рассчитать ее до начала моделирования, и исключить одну операцию умножения на каждом шаге. Численная схема (5), (6) обладает условием устойчивости  $(\Delta t/\Delta x)^2 < 1$ . Данный метод решения исторически одним из первых был применен для численного решения УСГ в работе [40]. В качестве начального условия задается кинк вида (2), движущийся с постоянной скоростью  $\vartheta_0$ , а граничные условия имеют вид  $\theta(-\infty, t) = 0$ ,  $\theta(+\infty, t) = \pi$ ,  $\theta'(\pm\infty, t) = 0$ .

Типичные реализации численного решения уравнения (1), которые использовались в [23], [28], [35], позволяют рассчитать структуру и динамику кинков с точностью вполне достаточной, чтобы наблюдать захват (или “пиннинг”) и прохождение кинка через примеси, а также структуру и свойства возбуждаемых нелинейных волн. Однако для изучения возможных резонансных эффектов необходима более высокая точность счета. Поэтому при аппроксимации функции  $\theta(x, t)$  использовалось уже  $N_x = 10^4$  точек.

В связи с повышенными требованиями к точности проводимых расчетов, необходимо реализовать особый контроль погрешности результата. Погрешность, накапливаемая в течение вычислительного эксперимента, оценивалась с помощью известного точного решения уравнения (1) для случая  $K(x) = 1$  в виде движущегося с постоянной скоростью кинка (2). Результат сравнения численного и аналитического решений приведен на фиг. 1. Приведенная погрешность рассчиты-



**Фиг. 1.** Зависимость максимальной приведенной погрешности  $\varepsilon$ , накапливаемой численной схемой за типичное время проведения численного эксперимента, от времени  $t$  при различных значениях параметра  $N_x$ .

валась следующим образом: в заданный момент времени максимальное отклонение численного решения от аналитического нормировалось на характерную величину  $\pi$ :

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \max |\theta(x, t) - \theta^*(x, t)|,$$

где  $\theta(x, t)$  – численное решение уравнения (1 – для  $N_x = 10^5$ ),  $\theta^*(x, t)$  – аналитическое решение (2 – для  $N_x = 10^4$ , 3 – для  $N_x = 10^3$ ). Из фиг. 1 видно, что даже для небольшого увеличения точности расчета необходимо многократное увеличение числа точек аппроксимации. Исходя из этого, используемое в расчетах значение  $N_x = 10^4$  является оптимальным. При этом на точность вычисления динамических характеристик моделируемой системы (например, частот колебаний центра кинка или бризера) наибольшее влияние оказывает не столько абсолютная величина накопленной погрешности, сколько амплитуда ее “осцилляции” (на фиг. 1 кривые 1 и 2 наиболее гладкие).

Программа численного моделирования (см. [39]) по схеме (5), (6) была реализована в среде разработки Delphi. При этом для уменьшения времени расчетов была проведена вычислительная оптимизация алгоритма. В частности, специфичность задачи позволила за счет уменьшения точности и ограничения пределов изменения аргумента ускорить вычисление синуса более чем в 8 раз при помощи полиномиальной аппроксимации:

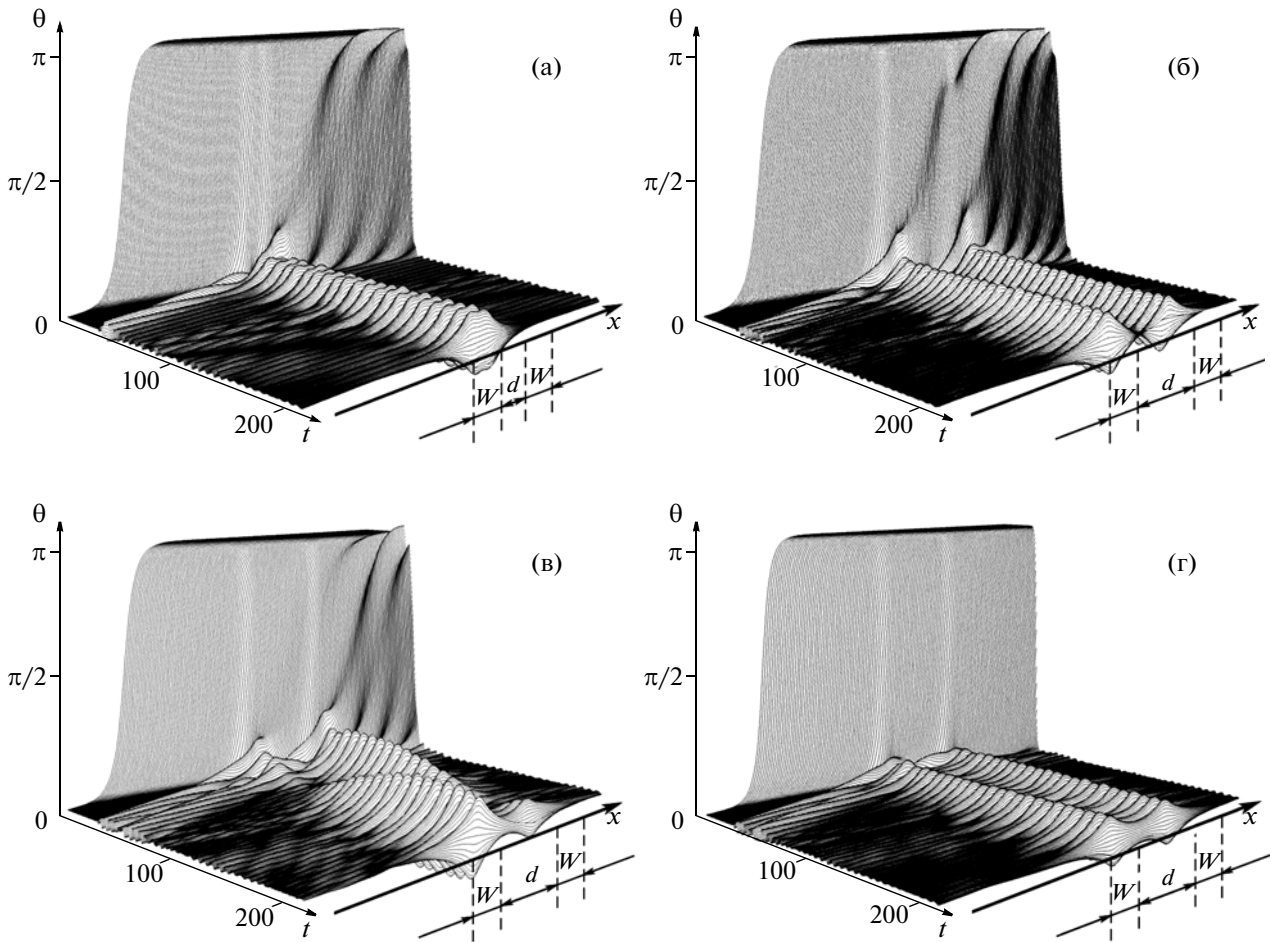
$$\sin x \approx -4B(x)[1 + B^2(x)[A_3 + B^2(x)[A_5 + B^2(x)[A_7 + B^2(x)[A_9 + B^2(x)A_{11}]]]]], \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} B(x) &= 0.25x + \pi/4, & A_7 &= -0.79794217405921, \\ A_3 &= -2.66592780638819, & A_9 &= 0.16264977471553, \\ A_5 &= 2.12775693434532, & A_{11} &= -0.01573479830529. \end{aligned}$$

Приближенная формула (7) позволяет вычислить значение синуса на отрезке  $[-2, 8]$  с точностью порядка  $10^{-4}$ . Условие нахождения аргумента синуса в пределах данного отрезка обеспечивается контролем величины невязки и полной энергии системы.

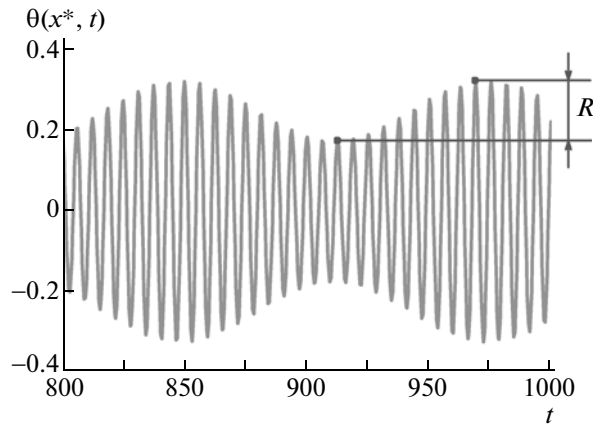
Для оптимизации операций обращения к памяти был использован встроенный ассемблер компилятора Delphi, который позволил за счет отказа от абстракций высокоуровневых языков программирования обойти многие их ограничения и написать существенно более оптимальный код, чем генерирует компилятор. По результатам тестирования за счет проведенных оптимизаций достигнуто общее ускорение вычислений примерно в 5 раз по сравнению с традиционной реализацией (см. [23]).



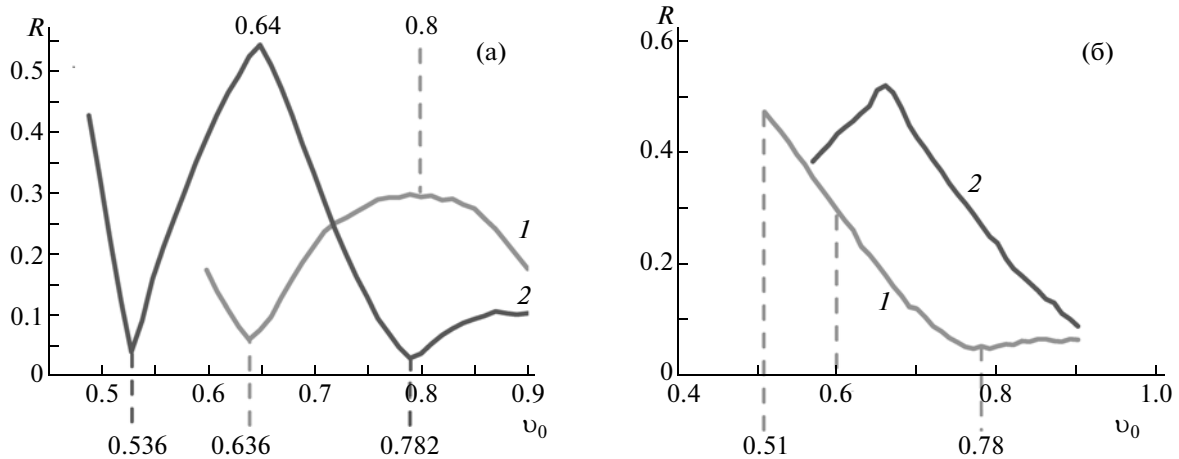
**Фиг. 2.** Возбуждение и эволюция локализованных примесных волн в области примеси вида (4) в результате прохождения кинка (с начальной скоростью движения  $\vartheta_0$ ) через эту область при  $\Delta K = 1.2$ ,  $W = 1$ : а – для  $d = 0.75$ ,  $\vartheta_0 = 0.6$ , б – для  $d = 5$ ,  $\vartheta_0 = 0.536$ , в – для  $d = 5$ ,  $\vartheta_0 = 0.64$ , г – для  $d = 5$ ,  $\vartheta_0 = 0.782$ .

В ходе проведенных численных экспериментов кинк пересекает примеси, при этом в каждый момент времени рассчитывается структура кинка и его основные динамические характеристики. Среди возможных вариантов динамики кинка наблюдались следующие: кинк “захватывается” в области первой, или второй примеси, кинк осциллирует между ними продолжительное время, кинк отражается в обратном направлении (см. [38], [41]). Далее исследуем подробнее случай, когда кинк проходит через обе примеси. В этом случае на примесях возбуждаются осциллирующие локализованные высокоамплитудные нелинейные волны бризерного типа (см. фиг. 2в, [23]), которые существенно влияют и на рассеяние кинка. Они представляют собой связанные четырехкинковые мультисолитонные состояния, которые мы далее будем называть *квадроном*. Квадрон можно рассматривать как мультисолитон, состоящий из связанных двухкинковых состояний бризерного типа, локализованных в области каждой из этих примесей, которые в свою очередь будем называть *примесными волнами*. При этом колебания примесных волн сопровождаются излучением малоамплитудных волн.

Результаты численных расчетов для общего случая показывают, что на характер возникающего состояния системы можно повлиять, меняя два параметра: начальную скорость кинка  $\vartheta_0$  и расстояние между примесями  $d$ . На фиг. 2 видно, что наблюдаются синфазные, аитифазные колебания, случаи биений и перехода двух взаимодействующих волн в одну. Можно утверждать, что в зависимости от  $d$  меняется тип связи между возбуждаемыми локализованными нелинейными волнами. Поскольку примесные волны возбуждаются не одновременно, а через некоторый промежуток времени  $\Delta t_0$ , то можно предположить, что  $\vartheta_0$  влияет и на начальную разность фаз их колебаний.



Фиг. 3. Зависимость  $\theta(x^*)$  от времени  $t$ , где  $x^*$  — координата центра одной из примесей вида (3) и определение величины  $R$  (амплитуда огибающей колебаний примесной волны).

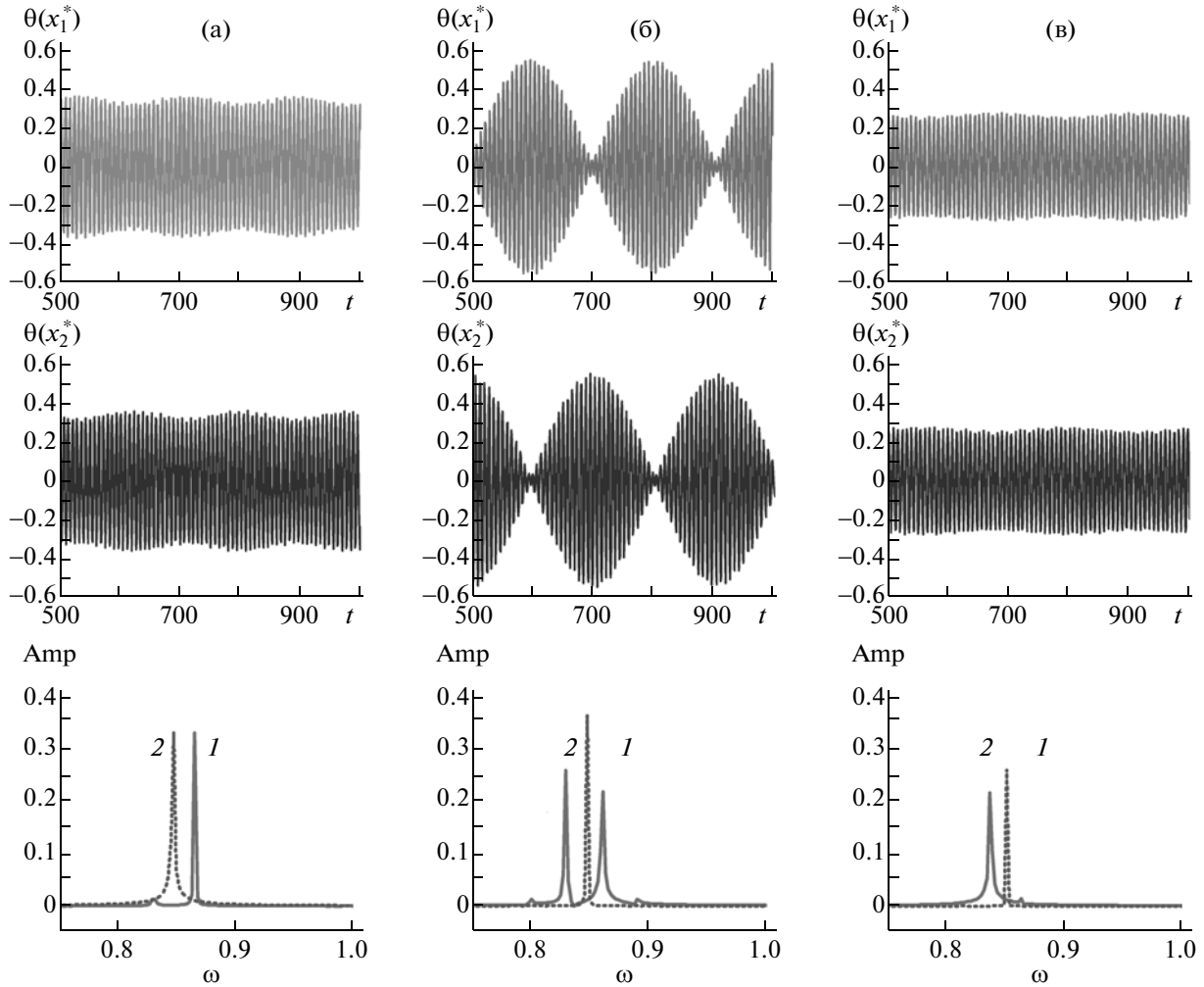


Фиг. 4. Зависимость величины амплитуды огибающей колебаний примесной волны  $R$  от начальной скорости кинка  $v_0$  при  $W = 1$ ,  $\Delta K = 1.2$  для случаев: а — для 1 при  $d = 4$ , 2 при  $d = 5$ ; б — для 1 при  $d = 2$ , 2 при  $d = 3$ .

Необходимо отметить, что из-за взаимодействия самих примесных волн появляется зависимость амплитуды от времени (периодический обмен энергией колебаний между примесными волнами, см. фиг. 2). При этом случай биений (см. фиг. 2в) является наиболее типичным режимом колебаний, а синфазные (см. фиг. 2г) и антифазные (см. фиг. 2б) колебания встречаются лишь в частных случаях (и в этих частных случаях частота и амплитуда бризера практически не зависят от времени, и определяются в основном параметрами  $\Delta K$  и  $W$ , а амплитуда зависит еще и от начальной скорости кинка (см. [23], [28])). Таким образом, наличие связи между примесными волнами может принципиально менять поведение системы по сравнению со случаем одиночной примеси.

### 2.1. Случай больших расстояний между примесями

Рассмотрим подробнее случай, когда возбуждаемые примесные волны расположены на большом расстоянии друг от друга (например, при  $\Delta K = 1.2$ ,  $d > 4$ ). Найдем зависимость от времени величины  $R(t) = |\max(A) - \min(A)|$ , где  $A = A(\theta(x^*), t)$  — мгновенное значение амплитуды колебаний примесной волны (см. фиг. 3). Данная величина удобна для измерения и автоматического анализа с помощью программной оболочки из [39]. По сути, чем больше значение  $R$ , тем большая “перекачка” энергии происходит между примесными волнами, что, однако, справедливо лишь в предположении, что частота их колебаний меняется не сильно, а изменение энергии колебаний примесной волны определяется преимущественно изменением ее амплитуды. Зависи-

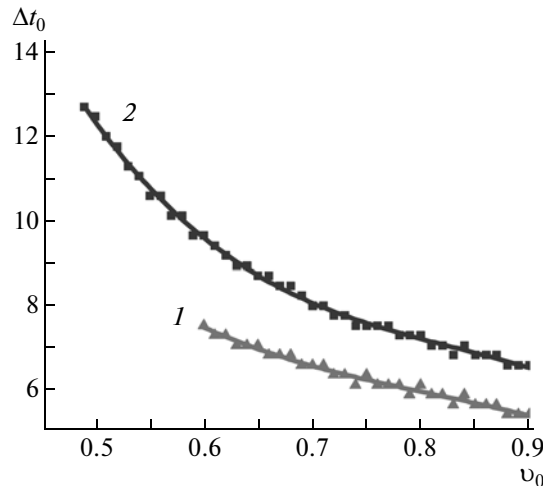


**Фиг. 5.** Зависимость  $\theta(x_i^*)$  от времени  $t$ , где  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  – координаты центров первой и второй примесей соответственно.  $\text{Amp}(\omega)$  – спектр Фурье-разложения зависимости  $\theta(x_1^*)$  (кривая 1) и спектр для случая одиночной примеси (3) при тех же параметрах  $W$ ,  $\Delta K$  и  $\vartheta_0$  (кривая 2). Параметры  $W = 1$ ,  $\Delta K = 1.2$ ,  $d = 5$ : а – для  $\vartheta_0 = 0.536$ , б – 0.64, в – для  $\vartheta_0 = 0.782$ .

мость величины  $R$  от начальной скорости кинка  $\vartheta_0$  для двух случаев  $d = 4$  и  $d = 5$  приведена на фиг. 4.

Рассмотрим подробнее поведение системы при  $\Delta K = 1.2$ ,  $d = 5$  в трех “особых” точках:  $\vartheta_0 = 0.536$ , 0.64, 0.782, которые соответствуют экстремумам на кривой 2 фиг. 4а. Первая и третья точки ( $\vartheta_0 = 0.536$ , 0.782) соответствуют минимальному, а вторая ( $\vartheta_0 = 0.64$ ) – максимальному изменению амплитуды колебаний примесных волн. В первой точке с  $\vartheta_0 = 0.536$  (см. фиг. 5а) наблюдаются антифазные колебания. Амплитуда (как и частота с  $\omega_{im} = 0.8663$ ) практически не зависит от времени. Вторая точка с  $\vartheta_0 = 0.64$  (см. фиг. 5б) соответствует случаю, когда с течением времени энергия колебаний одной из примесных волн практически полностью переходит к “соседней” примесной волне (и наоборот). Возникающий при этом колебательный режим похож на режим биений для гармонических осцилляторов (см. [42]). В третьей точке с  $\vartheta_0 = 0.782$  (см. фиг. 5в), как и в первом случае, наблюдается практически постоянное значение амплитуды ( $\omega_{im} = 0.8376$ ), однако колебания уже синфазные.

Спектральный фурье-анализ колебаний примесных волн позволил выделить две частотные компоненты, которые наиболее четко проявляются в режиме биений (фиг. 5б) и не зависят от параметра  $\vartheta_0$  (т.е. начальной разности фаз примесных волн). При этом в случае синфазных колеба-



**Фиг. 6.** Разность между моментами возбуждения примесных волн на первой и второй примесях  $\Delta t_0$  в зависимости от начальной скорости кинка  $v_0$ . Точками обозначены измеренные значения, сплошными линиями — кубическая полиномиальная аппроксимация. Параметры  $W = 1$ ,  $\Delta K = 1.2$ : 1 — для  $d = 4$ , 2 — для  $d = 5$ .

ний (см. фиг. 5в) в спектре Фурье присутствует только первая (нижняя), а в случае антифазных (см. фиг. 5а) — только вторая (верхняя) частотная компонента. Таким образом, колебания квадрона можно рассматривать как суперпозицию колебаний с двумя частотами. Причем можно сделать предположение о том, что данные частоты имеют отношение к различным состояниям системы: нижняя частота соответствует синфазным, а верхняя — антифазным колебаниям.

Заметим, что в случае одиночной примеси (3), рассмотренной ранее в [38], было показано наличие одной частоты для каждой пары значений  $\Delta K$  и  $W$ . На фиг. 5 (кривая 2) для сравнения приведен частотный спектр одиночной примеси. Все параметры моделирования остаются такими же, заменяется только примесь с двойной на одиночную. Видно, что частота одиночной примесной волны лежит между частотными компонентами колебаний квадрона.

Определим далее условие возбуждения режимов колебаний с определенной разностью фаз ( $0, \pi/2, \pi$ ). Введем величину  $\Delta t_0$  — разность между моментами возбуждения примесных волн на первой и второй примесях. Моментом возбуждения примесной волны условимся считать тот момент, когда кинк пересекает центр соответствующей примеси. Предположим для простоты, что начальная разность фаз примесных волн линейно пропорциональна  $\Delta t_0$ . Отношение  $\Delta t_0 / \bar{T}_{im}$  показывает, сколько периодов колебаний первой примесной волны проходит до момента возбуждения второй примесной волны. Значение, разумеется, приблизительное, поскольку предполагается, что первая примесная волна с момента возбуждения осциллирует с постоянной усредненной частотой  $\bar{\omega}_{im}$ . Тогда условия синфазности (целое число периодов колебаний первой примесной волны) и антифазности (нечетное число полупериодов колебаний той же примесной волны) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta t_0 &= n \bar{T}_{im}, \\ \Delta t_0 &= (2n + 1) / 2 \bar{T}_{im}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $n$  — целое число,  $\bar{T}_{im} = 2\pi / \bar{\omega}_{im}$ . Максимальные биения будут наблюдаться “посередине” между этими состояниями. Зависимость  $\Delta t_0$  от начальной скорости кинка  $v_0$  приведена на фиг. 6. Отдельные точки из полученных графиков, соответствующие “экстремумам” на фиг. 4 (т.е. режимам колебаний с определенной разностью фаз:  $0, \pi/2, \pi$ ), для удобства вынесены в таблицу вместе с рассчитанными по формулам (8).

Видно, что полученные точки с разностью фаз:  $0, \pi/2, \pi$ , в случае  $d = 5$  с хорошей точностью соответствуют приведенным выше формулам (8). При  $d = 4$  совпадение несколько хуже, что можно объяснить более сильным взаимодействием и перекачкой энергии между примесными волнами.

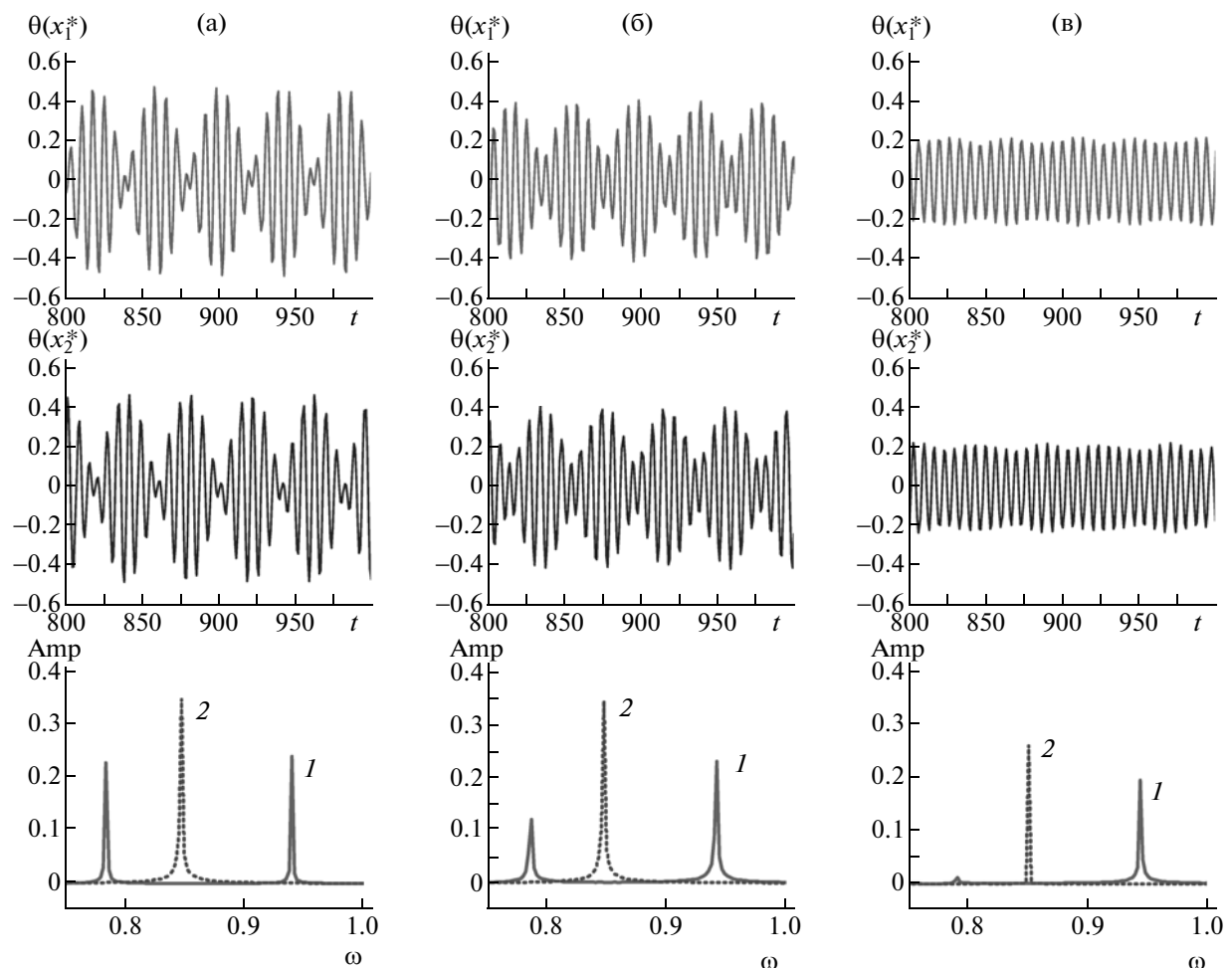


**Таблица.** Режимы колебаний примесных волн, возникающие в зависимости от начальной скорости кинка

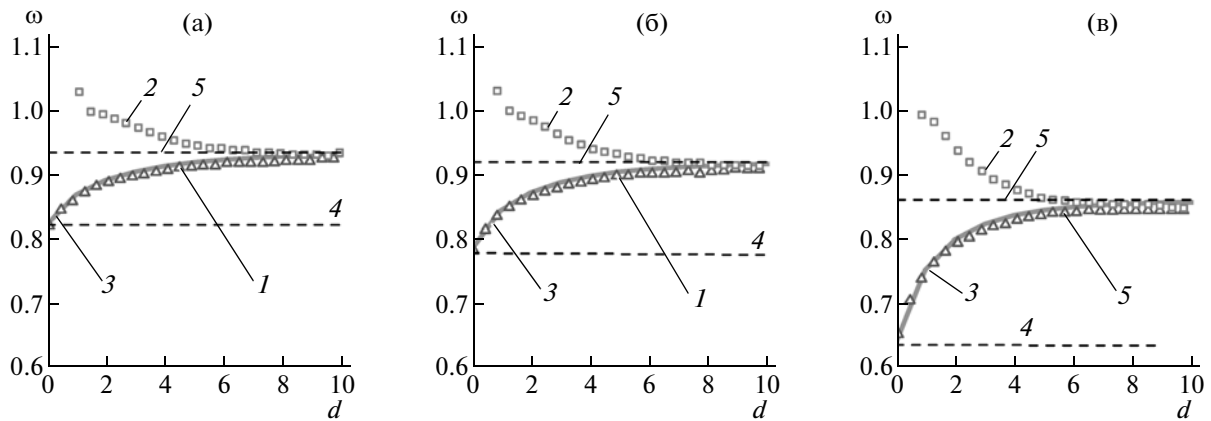
$d$	$\vartheta_0$	Тип	$\bar{\omega}_{\text{im}}$	$\bar{T}_{\text{im}}$	$\Delta t_0$	$\Delta t_0/\bar{T}_{\text{im}}$	$n$
5	0.536	антифазные колебания	0.8663	7.2529	11.19	1.5428	1
5	0.64	биения	0.8450	7.4357	8.81	1.1848	—
5	0.782	синфазные колебания	0.8376	7.5014	7.318	0.9755	1
4	0.636	синфазные колебания	0.8232	7.6326	7.09	0.9289	1
4	0.8	биения	0.8463	7.4243	5.95	0.8014	—

### 2.2. Случай малых расстояний между примесями

Теперь рассмотрим случай, когда возбуждаемые примесные волны расположены на малом расстоянии друг от друга (например, при  $\Delta K = 1.2$ ,  $d < 4$ ). Нами рассмотрены случаи  $d = 2$  и  $d = 3$ . Общий характер зависимости переменной  $R$  от  $\vartheta_0$  (см. фиг. 4б) отличается от случая больших расстояний между примесями (фиг. 4а). Аналогично рассмотренному ранее случаю исследуем более подробно режимы колебаний кривой  $d = 2$  в трех точках:  $\vartheta_0 = 0.51$ ,  $\vartheta_0 = 0.6$ ,  $\vartheta_0 = 0.78$ . В первой точке (см. фиг. 7а) амплитуда примесных волн претерпевает максимальные изменения со време-



**Фиг. 7.** Зависимость  $\theta(x_i^*)$  от времени  $t$ , где  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  — координаты центров первой и второй примесей соответственно.  $\text{Amp}(\omega)$  — спектр фурье-разложения зависимости  $\theta(x_1^*)$  (кривая  $I$ ) и спектр для случая одиночной примеси (3) при тех же параметрах  $W$ ,  $\Delta K$  и  $\vartheta_0$  (кривая 2). Параметры  $W = 1$ ,  $\Delta K = 1.2$ ,  $d = 2$ : а — для  $\vartheta_0 = 0.51$ , б — для  $\vartheta_0 = 0.6$ , в — для  $\vartheta_0 = 0.78$ .



Фиг. 8. Зависимость частотных характеристик примесных волн от расстояния между примесями  $d$  при  $W = 1$ : а – для  $\Delta K = 0.8$ , б – для  $\Delta K = 0.9$ , в – для  $\Delta K = 1.2$ .

нем. В третьей точке (фиг. 7в) амплитуда примесных волн со временем практически не меняется, вторая точка (фиг. 7б) является промежуточной между этими состояниями. В первой точке  $\vartheta_0 = 0.51$  возникает режим колебаний (фиг. 7а), похожий на рассмотренные ранее режимы колебаний, когда энергия примесных волн практически полностью переходит от одной к другой за счет изменения амплитуды колебаний. Во второй точке  $\vartheta_0 = 0.6$  (фиг. 7б) наблюдается аналогичная перекачка энергии колебаний, с той лишь разницей, что амплитуда убывает не до нуля. В третьей точке,  $\vartheta_0 = 0.78$ , амплитуда примесных волн остается практически постоянной, и они колеблются в противофазе.

Необходимо отметить, что при малых значениях  $d$  (в отличие от рассмотренного выше случая больших  $d$ ), изменив параметр  $\vartheta_0$ , не удастся получить произвольную начальную разность фаз примесных волн. Из-за этого в рассмотренных случаях, к примеру, не всегда удастся возбудить синфазные колебания примесных волн.

При дальнейшем уменьшении параметра  $d$  возникает ситуация, когда при любом начальном значении  $\vartheta_0$  разность фаз колебаний примесных волн сокращается до нуля, и через определенный промежуток времени они начинают колебаться синфазно. Антисимметричные колебания становятся неустойчивыми и возбудить данный режим колебаний не удастся. Объясняется это тем, что при  $d \rightarrow 0$  энергия связи начинает значительно превышать энергию колебаний примесных волн, что “синхронизирует” их колебания (см. [42]).

Как было отмечено выше, обе частотные компоненты, присутствующие в частотном спектре колебаний квадрона (за исключением частных случаев синфазных и антифазных колебаний), не зависят от параметра  $\vartheta_0$ . Дальнейшее исследование показало, что аналогичное поведение наблюдается и при других значениях параметра  $d$ . На фиг. 8 точечные кривые 1 и 2 показывают зависимость обеих частот от расстояния между примесями  $d$ . При этом точечная кривая 2 на фиг. 3 начинается не с нуля, так как при малых  $d$  устойчивостью обладают исключительно синфазные колебания.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

#### 3.1. Модель связанных идентичных осцилляторов

Ранее было показано (см. [3], [17], [25]), что колебания одиночной примесной волны можно описать аналитически, используя теорию возмущений, учитывающую возбуждение локализованной примесной моды при рассеянии кинка на точечной примеси. Для случая двух точечных примесей в [43] показано, что можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающую колебания двух идентичных гармонических осцилляторов со связью упругого типа (см. [42], [44]):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \Omega_0^2 \varphi_1 &= F(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 + \Omega_0^2 \varphi_2 &= -F(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\varphi_i = \varphi_i(t)$  – отклонение  $i$ -го маятника от положения равновесия,  $F = F(\Delta K, W, d)$  – параметр, который характеризует степень связи между эффективными осцилляторами,  $\Omega_0 = \Omega_0(\Delta K, W, d)$  – собственная частота колебаний эффективных осцилляторов.

Определим зависимости  $\Omega_0(d)$  и  $F(d)$  для трех случаев, изображенных на фиг. 8. Для этого перейдем к новым координатам:

$$\xi_S = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\sqrt{2}}, \quad \xi_A = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Тогда систему (9) можно переписать в виде (см. [42]):

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_S + \Omega_0^2 \xi_S &= 0, \\ \ddot{\xi}_A + (\Omega_0^2 + 2F) \xi_A &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, колебания осцилляторов можно рассматривать как суперпозицию колебаний с симметричной  $\Omega_S = \Omega_0$  и антисимметричной  $\Omega_A = (\Omega_0^2 + 2F)^{1/2}$  модами, которые принято называть *нормальными частотами* (модами) системы, а введенные переменные (10) – *нормальными координатами*. В частных случаях, когда колебания либо синфазны, либо антифазны, система в целом и каждый осциллятор в частности колеблются на соответствующей нормальной частоте. Таким образом, частота симметричной моды примесных волн (см. фиг. 8, точечная кривая 1) соответствует собственной частоте эффективных осцилляторов (9) и для ее определения аппроксимируем указанные кривые простой экспоненциальной зависимостью (см. [43]):

$$f(x) = A + B \exp(Cx),$$

где  $A, B, C$  – параметры аппроксимации. Результат аппроксимации:

$$\Omega_0(d) = 0.92323 - 0.10130 \exp(-0.48688d), \quad \Delta K = 0.8, \quad W = 1,$$

$$\Omega_0(d) = 0.90603 - 0.12192 \exp(-0.53047d), \quad \Delta K = 0.9, \quad W = 1,$$

$$\Omega_0(d) = 0.84563 - 0.19752 \exp(-0.65422d), \quad \Delta K = 1.2, \quad W = 1.$$

Аналогично, используя частоту антисимметричных колебаний примесных волн (см. фиг. 8, точечные кривые 2) и соотношение  $F = (\Omega_A^2 - \Omega_S^2)/2$ , можно определить

$$F(d) = 0.00277 + 0.22733 \exp(-0.40796d), \quad \Delta K = 0.8, \quad W = 1,$$

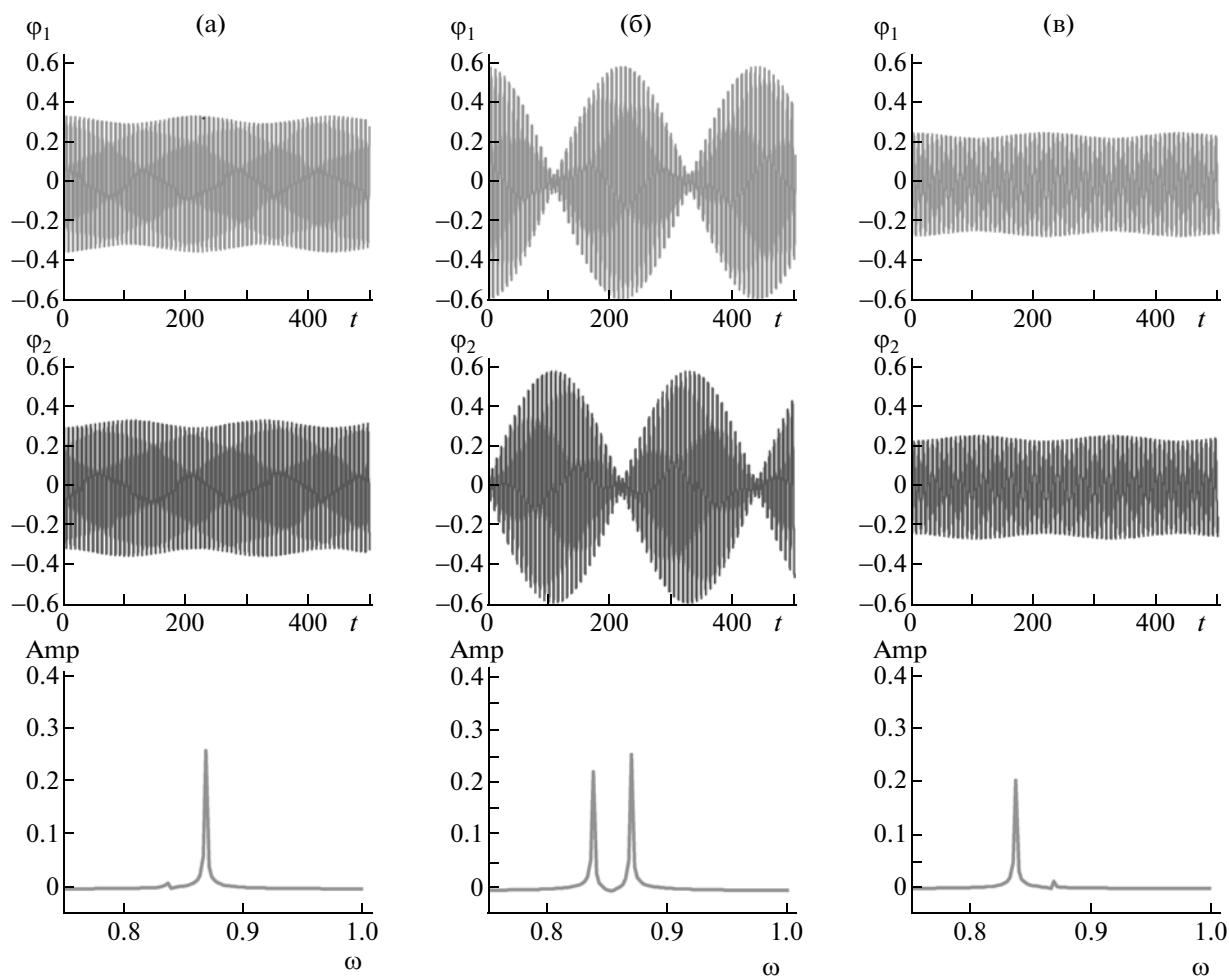
$$F(d) = 0.00192 + 0.26571 \exp(-0.43836d), \quad \Delta K = 0.9, \quad W = 1,$$

$$F(d) = 0.00141 + 0.37745 \exp(-0.53935d), \quad \Delta K = 1.2, \quad W = 1.$$

На фиг. 8 точками 1 обозначена частота синфазных колебаний, полученная с помощью фурье-анализа результатов численного решения (1). Точками 2 обозначена частота антифазных колебаний, полученная с помощью фурье-анализа результатов численного решения (1). Кривая 3 получена в результате аналитического решения (15). Линия 4, полученная из (18), соответствует частоте колебаний бризера в случае одиночной примеси удвоенной ширины. На фиг. 8а, б, в величина  $\omega$  равна, соответственно, 0.8221, 0.7825, 0.6382. Линия 5, полученная из (16), соответствует частоте колебаний бризера в случае одиночной примеси тех же размеров. На фиг. 8а, б, в величина  $\omega$  равна, соответственно, 0.9342, 0.9181, 0.8599.

Рассмотрим случай  $d = 5$  и предположим, что в начальный момент времени кинетическая энергия маятников равна нулю:  $\dot{\varphi}_i(0) = 0$ , т.е. возбуждение колебаний происходит лишь за счет первоначального отклонения. Система (9) интегрировалась численно в пределах от  $t_{\min} = 0$  до  $t_{\max} = 500$ . На фиг. 9 представлены три случая, для которых начальные условия  $\varphi_i(0)$  выбирались по аналогии с рассмотренными на фиг. 5. Имеем хорошее качественное и количественное совпадение. Характер спектров Фурье также подтверждает это.

Отметим также, что колебания примесных волн в общем случае не являются гармоническими, но их отличие от гармонических приобретает существенную роль лишь при большой амплитуде колебаний. В этом случае для модели (9) имеет смысл рассматривать другие типы осцилляторов, например, с синусоидальной нелинейностью. Однако для случаев, описанных в настоя-



**Фиг. 9.** Зависимость угла отклонения первого  $\varphi_1$  и второго  $\varphi_2$  осцилляторов модели (9) от времени  $t$ .  $\text{Amp}(\omega)$  – спектр фурье-разложения  $\varphi_1(t)$ . Начальные условия: а – для  $\varphi_1(0) = 0.338$ ,  $\varphi_2(0) = -0.3$ ; б – для  $\varphi_1(0) = 0.5821$ ,  $\varphi_2(0) = -0.04$ ; в – для  $\varphi_1(0) = 0.2571$ ,  $\varphi_2(0) = 0.23$ .

шей работе (когда примесные волны возбуждаются рассеянием кинка на примеси и их амплитуда, как правило, не превышает 0.6), учет синусоидальной нелинейности не приводит к заметной разнице, и поэтому хорошо подходят уравнения гармонических осцилляторов.

### 3.2. Линеаризация нелинейной задачи

В [38] показано, что для случая одиночной малой примеси путем линеаризации исходной задачи можно получить уравнение Шрёдингера, которое дает хорошее качественное и количественное совпадение с результатами численного моделирования.

Рассмотрим место дискретной примесной моды в спектре возбуждений задачи (1). Учтем, что для рассматриваемого одномерного случая уравнения (1) при  $K(x) = 1$  имеются еще и вакуумные решения, например,  $\theta_{\pm}(x, t) = 0$ . Будем искать спектр малых возбуждений вокруг него:

$$\psi(x, t) = \theta_{\pm}(x, t) + \delta\psi(x, t), \quad \delta\psi(x, t) = e^{-i\omega t}, \quad (12)$$

где  $|\delta\psi(x, t)| \ll 1$ . Подставляя (12) в (1) и линеаризуя уравнение по  $\delta\psi$ , получаем уравнение Шрёдингера:

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi + (\psi^2 - K(x))\psi = 0. \quad (13)$$

Возьмем пространственную модуляцию периодического потенциала  $K(x)$  в виде двух одинаковых прямоугольных потенциальных ям (4). Разбиваем область на пять зон. Вне примесей ищем решение в виде экспоненциальных функций, внутри – в виде тригонометрических функций:

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A_1 e^{-lx} + B_1 e^{lx}, \\ \psi_2(x) &= A_2 \sin kx + B_2 \cos kx, \\ \psi_3(x) &= A_3 e^{-lx} + B_3 e^{lx}, \\ \psi_4(x) &= A_4 \sin kx + B_4 \cos kx, \\ \psi_5(x) &= A_5 e^{-lx} + B_5 e^{lx}.\end{aligned}\tag{14}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k_0^2 + \omega^2 - 1 + \Delta K = 0, \quad k_0 = i\sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1}, \quad k = \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1}.$$

Предполагаем, что  $\omega^2 + \Delta K - 1 > 0$  и  $1 - \omega^2 > 0$ . Для получения дисперсионного соотношения можно использовать равенство значений функций и производных от функций по координате на границах областей:

$$l^2 - k^2 + 2lk \operatorname{ctg} kW = \pm(l^2 + k^2)e^{-ld},\tag{15}$$

где  $l = \sqrt{1 - \omega^2}$  и  $k = \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1}$ .

Правильность полученного результата проверяем, рассматривая предельные случаи  $d \rightarrow 0$  и  $d \rightarrow \infty$ . При  $d \rightarrow \infty$  правая часть соотношения (15) стремится к нулю и выражение переходит в дисперсионное соотношение, полученное ранее для случая одной примеси (см. [38])

$$l^2 - k^2 + 2lk \operatorname{ctg} kW = 0.\tag{16}$$

При  $d = 0$  имеем

$$l^2 - k^2 + 2lk \operatorname{ctg} kW = \pm(l^2 + k^2).\tag{17}$$

Знаки плюс и минус в выражении (17) соответствуют двум классам решений: четным и нечетным соответственно. Так как при  $d = 0$  две примеси можно рассматривать как одну эффективную с шириной  $2W$ , то необходимо сравнить (17) с выражением (16) для случая примеси удвоенной ширины:

$$l^2 - k^2 + 2lk \operatorname{ctg}(k \times 2W) = 0.\tag{18}$$

Можно показать, что дисперсионное соотношение в предельном случае двух сливающихся примесей совпадает с дисперсионным соотношением для случая одной примеси двойной ширины.

Заметим, что наше решение (14) содержит в себе и ряд интересных частных случаев. Например, возможны синфазные или антифазные колебания локализованных волн на примесях. Колебания в одной фазе возможны, если  $A_2 = A_4 = 0$  в (14), а в противофазе – при  $A_2 = B_4 = 0$ . Возможен также случай, когда две взаимодействующие волны перейдут в одну. Используя (15), построим зависимость  $\omega(d)$  для трех различных случаев (см. фиг. 8, кривая 3). Из него видно, что выполняются оба предельных случая  $d \rightarrow 0$  и  $d \rightarrow \infty$ . Линия 5 на фиг. 8 показывает частоту колебательной моды для случая одиночной примеси вида (3) с теми же параметрами  $\Delta K$  и  $W$ , найденную аналитически из (16), и представляет собой асимптоту для кривой 3. Линия 4 рассчитана аналогично из (18).

На фиг. 8 видно, что дисперсионное соотношение (15) (кривая 3) показывает хорошее качественное и количественное совпадение с численно рассчитанной симметричной модой (кривая 1). Объясняется это тем, что в выражение (15) входит собственная частота колебаний примесных волн, которая совпадает с частотой именно симметричной моды (как это следует из (11)).

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы структура и свойства четырехкинковых мультисолитонов (названных *квадронами*) в виде связанных локализованных волн, возбуждаемых в области примесей. Рассмотрены случаи как больших, так и малых расстояний между примесями. Исследована зависимость частот локализованных в области примеси нелинейных высокоамплитудных волн в зависимости от расстояния между примесями. Показано, что модель двух связанных идентичных осцилляторов хорошо описывает колебания квадрона. В частности, аналогично случаю двух связанных осцилляторов, в спектре колебаний наблюдается две частоты. Для случая малых амплитуд колебаний проведено аналитическое исследование спектра их возможных мод колебаний и получено хорошее качественное соответствие с результатами численных расчетов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Быков В.Г.* Нелинейные волновые процессы в геологических средах. Владивосток: Дальнаука, 2000.
2. *Якушевич Л.В.* Нелинейная физика ДНК. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007.
3. *Браун О.М., Кившарь Ю.С.* Модель Френкеля–Конторовой. Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008.
4. *Шамсутдинов М.А., Назаров В.Н., Ломакина И.Ю. и др.* Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. М.: Наука, 2009.
5. *Алфимов Г.Л.* Нелокальное уравнение синус–Гордона: решения типа “кинк” в пределе слабой нелокальности // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 4. С. 585–602.
6. *Гарифуллин Р.Н., Калякин Л.А., Шамсутдинов М.А.* Авторезонансное возбуждение бризера в слабых ферромагнетиках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 7. С. 208–1220.
7. *Косевич А.М., Ковалев А.С.* Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка, 1989.
8. *Quintero N.R., Sanchez A., Merten F.G.* Existence of internal modes of sine-Gordon kinks // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. № 1. P. R60–R63.
9. *Fogel M.B., Trullinger S.E., Bishop A.R., Krumhandl J.A.* Dynamics of sine-Gordon solitons in the presence of perturbations // Phys. Rev. TB. 1977. V. 15. P. 1578–1592.
10. *Knight C.J.K., Derks G., Doelman A., Susanto H.* Stability of stationary fronts in a nonlinear wave equation with spatial inhomogeneity // J. Different. Equat. 2013. V. 254. № 2. P. 408–468.
11. *Currie J.P., Trullinger S.E., Bishop A.R., Krumhandl J.A.* Numerical simulation of sine-Gordon soliton dynamics in the presence of perturbations // Phys. Rev. B. 1977. V. 15. № 12. P. 5567–5580.
12. *Маханьков В.Г.* Солитоны и численный эксперимент // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1983. Т. 14. № 1. С. 123–180.
13. *Zhang F., Kivshar Y.S., Vazquez L.* Resonant kink-impurity interactions in the sine-Gordon model // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 6019–6030.
14. *Piette B., Zakrzewski W.J.* Scattering of sine-Gordon breathers on a potential well // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. P. 046603.
15. *Fogel M.B., Trullinger S.E., Bishop A.R., Krumhansl J.A.* Classical Particlelike Behavior of Sine-Gordon Solitons in Scattering Potentials and Applied Fields // Phys. Rev. Lett. 1976. V. 36. P. 1411–1414.
16. *González J.A., Bellorin A., Guerrero L.E.* Internal modes of sine-Gordon solitons in the presence of spatiotemporal perturbations // Phys. Rev. E (Rapid Commun.). 2002. V. 65. P. 065601.
17. *Kivshar Y.S., Zhang F., Vazquez L.* Resonant soliton-impurity interactions // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 1177–1180.
18. *Якушевич Л.В., Каушанова Г.Р., Закирьянов Ф.К.* Влияние периодического поля с постоянной и медленно меняющейся частотой на движение кинка в ДНК // Биофизика. 2012. Т. 57. № 1. С. 21–26.
19. *Paul D.I.* Soliton theory and the dynamics of a ferromagnetic domain wall // J. Phys. C: Solid State Phys. 1979. V. 12. P. 585–593.
20. *Javidan K.* Analytical formulation for soliton-potential dynamics // Phys. Rev. E. 2008. V. 78. P. 046607.
21. *Белова Т.И., Кудрявцев А.Е.* Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // Успехи физ. наук. 1997. Т. 167. № 4. С. 377–406.
22. *Piette B., Zakrzewski W.J.* Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells // J. Phys. A: Math. and Theor. 2007. V. 40. P. 5995–6010.
23. *Екомасов Е.Г., Азаматов Ш.А., Муртазин Р.Р.* Изучение зарождения и эволюции магнитных неоднородностей типа солитонов и бризеров в магнетиках с локальными неоднородностями анизотропии // Физ. металлов и металловедение. 2008. Т. 105. № 4. С. 341–349.
24. *Malomed B.A., Nepomnyashchy A.A.* Interaction of two fluxons near a local inhomogeneity in a long Josephson junction // Phys. Rev. B. 1992. V. 45. № 21. P. 12435–12441.

25. *Goodman R.H., Haberman R.* Interaction of sine-Gordon kinks with defects: The two-bounce resonance // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. V. 195. № 3. P. 303–323.
26. *Bratsos A.G.* The solution of the two-dimensional sine-Gordon equation using the method of lines // *J. Comput. Appl. Math.* 2007. V. 206. № 1. P. 251–277.
27. *Gornostyrev Y. N., Katsnelson M. I., Stroeve A.Y., Trgfilov A.V.* Impurity-kink interaction in the two-dimensional Frenkel-Kontorova model // *Phys. Rev. B*. 2005. V. 71. P. 094105.
28. *Екомасов Е.Г., Азаматов Ш.А., Муртазин Р.Р.* Возбуждение нелинейных уединенных изгибных волн в движущейся доменной границе // *Физ. металлов и металловедение*. 2009. Т. 108. № 6. С. 1–6.
29. *Kalberman G.* The sine-Gordon wobble // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2004. V. 37. P. 11603–11612.
30. *Gulevich D.R., Kusmartsev F.V.* Perturbation theory for localized solutions of the sine-Gordon equation: Decay of a breather and pinning by a microresistor // *Phys. Rev. B*. 2006. V. 74. P. 214303.
31. *Крючков С.Б., Капля Е.В.* Солитонная линия задержки на основе полупроводниковой сверхрешетки // *Ж. техн. физ.* 2003. Т. 73. С. 53–56.
32. *González J.A., Cuenda S., Sánchez A.* Kink dynamics in spatially inhomogeneous media: The role of internal modes // *Phys. Rev. E*. 2007. V. 75. P. 036611.
33. *Ekomasov E.G., Murtazin R.R., Bogomazova O.B., Gumerov A.M.* One-dimensional dynamics of domain walls in two-layer ferromagnet structure with different parameters of magnetic anisotropy and exchange // *J. Magn. Magn. Mater.* 2013. V. 339. P. 133.
34. *Екомасов Е.Г., Муртазин Р.Р., Богомазова О.Б.* Динамика кинков модифицированного уравнения синус-Гордона при наличии ступенчатой пространственной модуляции периодического потенциала // *Нелинейный мир*. 2013. Т. 11. № 1. С. 51–57.
35. *Ekomasov E.G., Shabalin M.A.* Simulation the nonlinear dynamics of domain walls in weak ferromagnets // *The Physics of Metals and Metallography*. 2006. V. 101. P. S48–S50.
36. *Kälbermann G.* A model for soliton trapping in a well // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2001. V. 12. № 13. P. 2381–2385.
37. *Екомасов Е.Г., Гумеров А.М., Рахматуллин И.И.* Численное моделирование пиннинга и нелинейной динамики доменных границ в ферромагнетиках с дефектами // *Вестн. Башкирского университета*. 2010. Т. 15. № 3. С. 564–566.
38. *Екомасов Е.Г., Гумеров А.М., Муртазин Р.Р.* О возбуждении солитонов при взаимодействии кинков уравнения синус-Гордона с притягивающей примесью // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2012. Т. 4. № 3. С. 509–520.
39. *Гумеров А. М., Екомасов Е.Г., Муртазин Р.Р.* Моделирование динамики доменных границ в слабых ферромагнетиках // *Хроники объединенного фонда электронных ресурсов. Наука и образование*. 2010. № 5.
40. *Perring J.K., Skyrme T.H.R.* A model unified field equation // *Nuclear Physics*. 1962. V. 31. P. 550–555.
41. *Гумеров А.М., Екомасов Е.Г.* Исследование влияния точечных дефектов на нелинейную динамику магнитных неоднородностей // *Письма о материалах*. 2013. Т. 3. № 2. С. 103–105.
42. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: НИЦ. Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
43. *Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Murtazin R.R.* Nonlinear dynamics of the magnetic inhomogeneities in magnetic with modulation of the magnetic parameters // *International-Conference Nonlinear Equat. and Complex Analys. Bannoe Lake (Russia)*: 2013. P. 24.
44. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Либроком, 2010.